Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Master in Comunicazione della Scienza
"Franco Prattico"

Raccontare l'astrazione

Tesi di
Oscar Pizzulli

Relatore
Daniele Gouthier

Anno Accademico 2019/2020

INDICE

Introduzione

Obiettivo di questa tesi è l'indagine delle scelte comunicative adottate dagli autori di testi divulgativi di matematica per raccontare, a un pubblico di non esperti, argomenti astratti.

La matematica, come si spiega nel primo capitolo è, tra tutte le discipline, quella che maggiormente studia oggetti ed enti lontani dalla realtà di tutti i giorni. O almeno questa è l'opinione diffusa tra molte persone che alla matematica legano i propri ricordi scolastici non sempre piacevoli. Da qui la necessità, per coloro che comunicano argomenti matematici, di tener conto del punto di partenza del lettore, favorendo una comunicazione che raggiunga il giusto equilibrio tra rigore ed efficacia.

Lo studio della comunicazione dell'astrazione è stato svolto analizzando un campione composto da libri e riviste del panorama editoriale italiano come esposto nel secondo capitolo. Sempre nel secondo capitolo viene presentata la griglia di analisi con le tre categorie scelte per studiare il campione: quella dei simboli, quella degli esempi e quella delle metafore.

Infine, nel terzo e nel quarto capitolo sono stati presentati i risultati dell'analisi per ciascun libro e rivista del campione.

CAPITOLO 1 Comunicare l'astrazione tra rigore ed efficacia

1.1 La comunicazione dell'astrazione

L'astrazione è un concetto che si presta a molteplici interpretazioni e attraversa, in maniera trasversale, vari ambiti disciplinari. La voce di Wikipedia, ad esempio, la declina in cinque interpretazioni diverse, afferenti, rispettivamente, alla filosofia, all'arte, all'informatica, alla logica matematica e alla mitologia[1].

Nel linguaggio comune l'astrazione è spesso contrapposta alla realtà. Ciò che è astratto non è reale o, per meglio dire, concreto. Una simile chiave di lettura, se non è arricchita da altri punti di vista, rischia di ridurre l'astrazione a un procedimento sterile, inutile e contrapposto a una più proficua concretezza. Al contrario, *«manipolare l'astrazione* – scrive Daniele Gouthier in un articolo pubblicato sulla rivista Archimede – *significa riconoscere regolarità matematiche, riconoscerle nella realtà e usarle per decidere e agire nella nostra vita*[2]*»*. L'astrazione, dunque, non solo è utile ma ci soccorre nell'interpretare al meglio la complessità del reale che è sotto i nostri occhi.

Tra le varie discipline la matematica è, senza dubbio, quella che più di ogni altra ha fondato le proprie conoscenze sul ragionamento astratto. Per questo motivo un'educazione all'astrazione può formarsi e svilupparsi durante le ore di matematica o, terminati gli studi, attraverso la lettura e l'approfondimento di opere divulgative.

È lecito allora chiedersi, come è stato fatto in questo lavoro di tesi, in che modo l'astrazione viene raccontata e comunicata in testi che, cercando di raggiungere un pubblico più eterogeneo possibile, affrontano tematiche e questioni matematiche.

Per rispondere a questa domanda occorre, innanzitutto, comprendere cosa si intende per astrazione in matematica. A tale scopo sono stati interrogati alcuni tra i più

[1] https://it.wikipedia.org/wiki/Astrazione
[2] D. Gouthier, *Matematica. Saperne un minimo*, Archimede n. 4, 2017

autorevoli dizionari enciclopedici italiani: il dizionario Utet, l'enciclopedia Garzanti della matematica e la Piccola Treccani.

Per il dizionario Utet l'astrazione, in matematica, è: *«un procedimento capace di dar luogo a entità astratte e universali: quando, p. es., consideriamo un angolo* – prosegue il testo – *lo analizziamo e ricaviamo una definizione di "angolo" valida universalmente, che astrae da quell'angolo particolare*[3]*»*. L'astrazione, dunque, è un processo che permette di riconoscere, dal confronto di oggetti particolari, un'idea universale come quella di angolo o di numero. Ma in che modo avviene questo riconoscimento? Lo spiega l'enciclopedia Garzanti, per la quale l'astrazione è: *«un processo […] che permette di definire enti, concetti o procedure matematiche, estraendo e isolando alcune caratteristiche comuni a più oggetti e trascurandone altre*[4]*»*. Una definizione molto simile a quella data, nel diciottesimo secolo, dal matematico svizzero Leonard Euler. Questi, infatti, nelle lettere a una principessa tedesca della corte di Prussia, aveva definito l'astrazione come quella facoltà che si ha *«quando l'anima fissa la propria attenzione esclusivamente su una quantità o qualità dell'oggetto da cui la separa, considerandola come se non fosse più unita ad esso*[5]*»*. Nella lettera il geniale matematico riportava tre esempi a sostegno della sua tesi: l'idea di rotondità, che si può ricavare dall'osservazione della luna piena, quella di calore, ricavata dal contatto con una pietra calda e quella del colore rosso, suggerita dalla vista di un abito vermiglio. Tuttavia, come precisa Euler, le stesse idee si potrebbero ricavare osservando oggetti diversi, purché portatori della stessa caratteristica comune.

Dalla definizione della Garzantina, si ricava, altresì, che il processo di astrazione è esteso anche alle procedure matematiche, oltre che ai concetti. Questa precisazione è molto importante perché permette di adoperare gli stessi strumenti di indagine sia per gli articoli che presentano un teorema o una teoria matematica, sia per quelli scritti con l'intento di familiarizzare il lettore con un algoritmo di calcolo. Un esempio che ricade in quest'ultima casistica è l'articolo di Paolo Caressa *La pioggia nel pi greco*, presente nel numero rivista Prisma di febbraio 2019. In questo articolo viene illustrato il metodo ideato nel 1733 dal conte di Buffon per calcolare il valore approssimato del

---

[3] *Grande Dizionario Enciclopedico*, Utet, 1994
[4] *Enciclopedia della matematica*, Garzanti, 2013
[5] Eulero, *Lettere a una principessa tedesca Volume primo*, Bollati Boringhieri, 2007

pi greco. Come ci ricorda l'autore il pi greco (simbolo π) è un numero irrazionale, con uno sviluppo decimale infinito. Le cifre decimali di π si possono ricavare eseguendo delle operazioni come quelle escogitate dal conte di Buffon su cui si concentra l'articolo. Il procedimento è il seguente. Si disegna un cerchio di raggio 1 inscritto in un quadrato di lato 2 e si immagina di mettere il disegno sotto la pioggia. Basandosi sul fatto che le gocce cadano distribuendosi in maniera uniforme, spiega l'autore dell'articolo, è possibile associare al numero di gocce cadute all'interno del cerchio l'area del cerchio e al numero di gocce cadute in tutto il quadrato l'area del quadrato. Maggiore è il numero di gocce migliore sarà l'approssimazione. Dalle considerazioni svolte si ha che il rapporto tra l'area del quadrato e l'area del cerchio è dato dal rapporto tra il numero di gocce cadute in tutto il quadrato e il numero di gocce cadute solo dentro il cerchio. Dal momento che il cerchio ha raggio unitario, dalla formula dell'area del cerchio $\pi \times (\text{Raggio})^2$, si ha che la sua area è uguale a π. L'area del quadrato di lato 2 è, invece, pari a 4. Pertanto, questo metodo permette di ricavare come valore approssimato di π:

$$\pi \approx 4 \times \frac{\text{Numero di gocce cadute soltanto nel cerchio}}{\text{Numero di gocce cadute in tutto il quadrato}}$$

Ritorniamo ora alle definizioni di astrazione. L'ultima che citiamo è quella della Piccola Treccani. Per l'enciclopedia fondata nel 1929 da Giovanni Treccani e Giovanni Gentile l'astrazione è: *«il processo di costruzione o definizione di nuovi enti, a partire da classi di oggetti (o di enti costruiti attraverso precedenti astrazioni)[6]»*. E ancora: *«il processo di astrazione consiste nel considerare come un nuovo ente individuale una classe di enti precedentemente definiti (processo di entificazione) o, se si vuole, con un linguaggio però meno preciso, nel considerare come un nuovo ente "quello che vi è di comune" tra gli elementi di una classe[7]»*. A titolo di esempio l'enciclopedia riferisce il procedimento che porta a definire il punto all'infinito di una retta, interpretando, tale punto, come quell'elemento comune alla retta e alle sue parallele.

Questa definizione completa le precedenti e mette in risalto la capacità, propria del ragionamento astratto, di edificare su idee precedenti nuovi concetti che non sempre

[6] *La Picccola Treccani*, 1995
[7] Ibidem

si possono cogliere con i sensi. I numeri immaginari e gli spazi a più dimensioni sono solo alcuni degli esempi che si potrebbero, a tal proposito, citare.

Da quanto detto si evince che il processo di astrazione è un processo che coinvolge il lettore, il quale deve operativamente riconoscere le caratteristiche comuni a diversi oggetti, enti o procedure matematiche. O ancora, come nel caso dell'ultima definizione che abbiamo dato, deve costruire un nuovo concetto su elementi precedentemente fissati. Si può supporre che questo coinvolgimento da parte del lettore non sia diverso da quello che si ha quando si legge un testo narrativo. In *Lector in fabula* Umberto Eco scrive che il lettore, di fronte a un testo narrativo, entra in uno stato di attesa e cerca di anticipare gli stati successivi. L'insieme di tutte le possibili evoluzioni di una storia, che il lettore prende in considerazione sulla base di precise regole definite a priori, rappresentano quello che Eco chiama un *mondo possibile*. Il processo di astrazione può quindi essere visto come un'attività simile alla costruzione di un mondo possibile. Tuttavia, prosegue il semiologo, «*un mondo possibile si sovrappone abbondantemente al mondo "reale" dell'enciclopedia del lettore*[8]». In altre parole, le conoscenze su cui il lettore basa le sue ipotesi sul prosieguo di una storia o, continuando l'analogia con il processo di astrazione, le regole su cui si basa per costruire nuovi concetti o astrarre caratteristiche comuni e generali, dipendono dal mondo reale di partenza. Ed è proprio su questo punto che può crearsi una frattura, più o meno grande, tra il mondo reale, costituito dalle conoscenze del lettore non esperto e il mondo matematico con le sue proprietà e le sue regole, specifiche della disciplina. Daniele Gouthier e Marta Salvador, nell'articolo *Modo simbolico, mondi possibili e matematica*, pubblicato sul Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, propongono a tal proposito l'esempio delle geometrie non euclidee che, per il fatto di essere distanti dall'esperienza comune di uno spazio euclideo con cui facciamo quotidianamente i conti, possono generare stupore.

Da quanto detto si evince l'importanza di considerare il mondo di riferimento dal quale un autore decide di partire quando deve comunicare un argomento di matematica. Le possibilità che sono state analizzate in questo elaborato e che verranno esplicitate meglio nel prossimo capitolo, ricadono in tre gruppi.

[8] U. Eco, *Lector in fabula*, Bompiani, 2016

Al primo gruppo appartengono le scelte comunicative che prendono come punto di partenza il mondo reale vicino al lettore. Un esempio calato nella quotidianità o un’immagine connessa a oggetti concreti sono casi che rientrano in questa primo gruppo. Per quanto detto ci si aspetta che una scelta di questo tipo attivi un maggior coinvolgimento da parte del pubblico non esperto e riduca quella frattura tra mondo reale e mondo matematico.

Una seconda possibilità è quella in cui un autore utilizza riferimenti ad altre discipline diverse dalla matematica come, ad esempio, quelle artistiche. In questo caso, usando un’espressione sportiva, potremmo dire che l’autore sceglie di giocare la partita su un campo neutro. Così facendo, il mondo di riferimento è un punto di incontro tra quelli che sono gli interessi dell’autore e quelli che possono essere gli interessi del lettore, a prescindere dalla preparazione matematica di quest’ultimo. Il coinvolgimento, in questo caso, sarà tanto maggiore quanto più forte il legame del lettore con i riferimenti culturali utilizzati dall’autore.

Infine, all’ultimo gruppo appartengono tutte le scelte comunicative che non si discostano dal mondo matematico e prendono in considerazione esempi interni a questo mondo. Si può prevedere che una simile scelta, a differenza delle precedenti, attivi un minor coinvolgimento di coloro che sono portati a vedere la matematica come una disciplina distante dalla realtà e può aumentare la distanza autore e lettore.

Come si vedrà meglio nel capitolo successivo, ai tre gruppi qui considerati possono essere assegnati diversi livelli di astrazione e, viceversa, di concretezza. In particolare, possiamo dire che, minore sarà la distanza tra il mondo di riferimento scelto dall’autore e il mondo reale di partenza del lettore, minore sarà il livello di astrazione. Al contrario più vicino sarà il mondo di riferimento di un testo al mondo matematico, maggiore sarà il livello di astrazione.

1.2 Rigore o efficacia?

Alle tre scelte comunicative che abbiamo preso in considerazione nel paragrafo precedente si può associare un'altra dicotomia, oltre a quella tra astrazione e concretezza, ovvero quella tra rigore e ambiguità.

Come scrivono Gouthier e Pitrelli nell'articolo *Linguaggio, simboli e matematica*, pubblicato in *La Stella Nova*, una convinzione diffusa è quella che la matematica coincida con il rigore. Spesso questo rigore è associato al linguaggio utilizzato, un insieme di formule e simboli che si ritiene siano noti solo al ristretto gruppo degli iniziati, in questo caso i matematici.

Riferendosi alla comunicazione dei matematici verso i non esperti, il matematico italiano Giuseppe Peano, ha parlato di comunicazione verticale e l'ha contrapposta alla comunicazione orizzontale che si svolge tra matematici. Se nella comunicazione orizzontale lo sviluppo di un linguaggio comune, cui lo stesso Peano ha fornito un notevole contributo, ha annullato il rischio di incomprensioni concettuali, nella comunicazione verticale e nella didattica della matematica restano ampie zone di ambiguità.

La contrapposizione tra rigore e ambiguità è ben rappresentata dalla distinzione tra il linguaggio utilizzato dai matematici nella comunicazione orizzontale, che fa uso di formule e simboli, e il linguaggio metaforico tipico degli scrittori e dei poeti. Secondo Joseph Mazur, che ha evidenziato questa distinzione nel libro *Storia dei simboli matematici*, lo scrittore gode di maggiore libertà nell'uso dei simboli e se ne può servire per suscitare emozioni a discapito dell'esattezza. L'esempio proposto da Mazur è quello della metafora utilizzata da Josph Conrad in *Cuore di tenebra* per paragonare il fiume Congo a un «*immenso serpente disteso con la testa nel mare*». Questo esempio mostra bene il contenuto di ambiguità di una metafora in quanto il fiume Congo effettivamente non è un serpente ma in questo modo Conrad, spiega Mazur, «*evoca tutti i tratti del maligno come entità strisciante e meschina*[9]».

Al contrario il linguaggio matematico, scrive Andrea Capozucca, «*è caratterizzato da monosemia, mono-referenzialità, unicità, capacità di essere in relazione con termini differenti, e da una precisa collocazione nel regime linguistico*[10]». Le formule matematiche sono un esempio di queste specificità dal momento che in una formula ciascun simbolo fa riferimento a una precisa quantità, o grandezza, mentre il modo con il quale i simboli sono messi in relazione rispetta delle regole ben precise. Nel libro

[9] J. Mazur, *Storia dei simboli matematici*, il Saggiatore, 2015
[10] A. Capozucca, *Comunicare la matematica*, AL1C3&BO8, novembre 2018

Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo Ian Stewart ha ben rappresentato graficamente la peculiarità delle formule matematiche di racchiudere in una forma compatta diverse informazioni che solo gli esperti, il più delle volte, possono riconoscere. Ogni capitolo del libro di Stewart si apre con una formula sulla quale sono riportate le definizioni di ogni simbolo come mostra questo esempio.

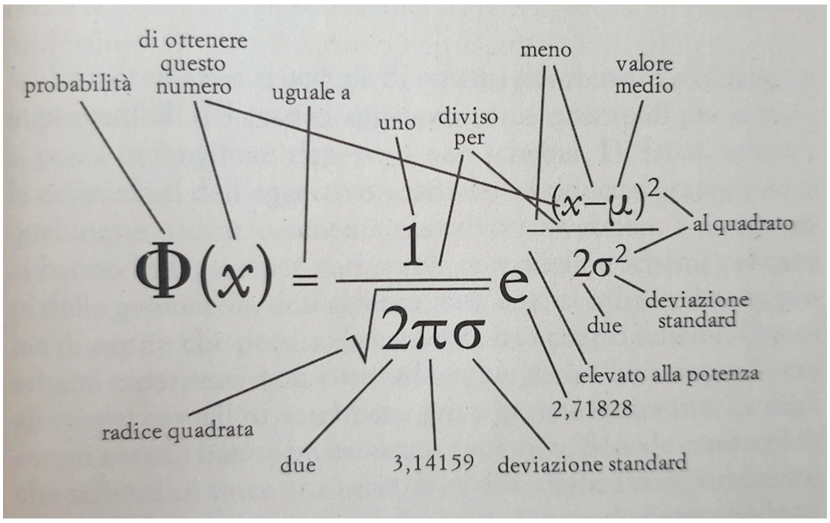


Figura 1. La formula che rappresenta la distribuzione normale delle probabilità, tratta dal libro "Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo" di Ian Stewart.

Chi non è in grado di inferire da una formula informazioni come quelle esplicitate da Ian Stewart può mostrare, secondo Capozucca, quella che Peano chiamava la *paura del rigore*, al punto da sentirsi respinto da questo particolare tipo di linguaggio.

Da quanto detto si evince che non è possibile trasportare la comunicazione orizzontale, diffusa tra i matematici, anche sul piano verticale. Come ha osservato il giornalista scientifico Pietro Greco nell'articolo *What type of Science Communication best suits emerging countries?* un maggior rigore (R) coincide con una minore comunicabilità, o efficacia (E), e viceversa. immaginando di considerare un rigore ideale, R*, e un'efficacia ideale, E*, questo principio, un po' come il principio di indeterminazione di Heisemberg nella fisica, può essere espresso in formula nel seguente modo:

$$(R^* - R)\,(E^* - E) \geq h > 0$$

La formula si legge osservando che lo scarto tra rigore ideale e rigore effettivo e tra efficacia ideale ed efficacia effettiva non possono essere, contemporaneamente, annullati. In altre parole, nella comunicazione scientifica e in particolare quando si comunicano argomenti matematici, non è possibile essere rigorosi e, al tempo stesso, efficaci, ma occorre trovare un compromesso.

In questo elaborato, come verrà esposto nel prossimo capitolo, è stato analizzato un campione di libri e riviste di divulgazione matematica con l'intento di studiare le scelte adoperate dagli autori per districarsi tra le dicotomie insite nella comunicazione dell'astrazione.

CAPITOLO 2 Materiali e metodi

2.1 Il campione: i saggi

La maggior parte delle più importanti case editrici pubblica saggi di matematica. Ognuna lo fa seguendo la propria linea editoriale, in genere inserendo questi testi in collane che contengono anche altri saggi di divulgazione scientifica. È il caso di case editrici come Codice Edizioni, Raffaello Cortina Editore o Bollati Boringhieri, per citarne solo alcune. Per gli appassionati, i curiosi e chiunque abbia voglia di cimentarsi con la matematica c'è oggi una vasta scelta a disposizione.

A causa di questa estesa produzione, districarsi tra i diversi titoli che occupano gli scaffali delle librerie e, tra questi, selezionarne un numero ristretto, richiede che vengano stabiliti dei vincoli oggettivi. Il primo criterio scelto è stato quello geografico. In altre parole, si è deciso di focalizzare l'attenzione verso opere di autori italiani. In secondo luogo, è stato preso in considerazione il fattore temporale. Come qualsiasi opera umana, infatti, la scrittura si trasforma nel corso del tempo, inseguendo tendenze ed esigenze del pubblico. La scrittura di opere divulgative, in particolare di matematica, non fa eccezione. Per circoscrivere il campione delle opere scelte si è deciso, quindi, di prendere in considerazione solamente opere pubblicate a partire dal 2018. In questo modo si è ritenuto di poter svolgere l'analisi su opere molto recenti che, con buona approssimazione, rispecchiano lo stato attuale della divulgazione matematica.

A questo punto, alla ricerca di un ulteriore criterio in grado di rendere omogeneo il campione, si è rivolta l'attenzione verso una proposta editoriale che ben si accompagna all'intento di questo lavoro di tesi. Si tratta della serie *Raccontare la matematica*, una raccolta di saggi della collana *Intersezioni*, pubblicati dalla casa editrice Il Mulino. Al momento la serie consta di dodici testi, pubblicati a partire dal 2015, che spaziano dalla matematica applicata, come nel caso del saggio *La matematica dell'incertezza*, alla filosofia della matematica, come *La matematica della natura*. Scritti da matematici di professione, eccezion fatta per *Caos*, che tra i coautori ha lo scrittore e chimico Marco Malvaldi, i saggi della serie si caratterizzano per l'interdisciplinarietà e l'approccio storico. «*Questi libri raccontano la matematica come alfabeto del mondo, in un approccio che unisce aspetti filosofici e umanistici, e ne mostra i legami con la storia del pensiero*[11]», si legge nella presentazione sul sito della casa editrice.

In base alla scelta temporale fatta i titoli della serie che sono stati letti e analizzati in questo lavoro di tesi sono quelli pubblicati a partire dal 2018, ovvero: *La forma delle cose* di Marco Andreatta, *Geometria senza limiti* di Laura Catastini e Marco Ghione, *Infinito* di Umberto Bottazzini e *Matematica come narrazione* di Gabriele Lolli.

Marco Andreatta, *La forma delle cose*

Marco Andreatta è professore ordinario di Geometria all'Università di Trento dove dirige il Dipartimento di Matematica e il Centro Internazionale di Ricerche Matematiche. Proprio alla geometria l'autore ha dedicato questo libro che ripercorre la storia di questa disciplina, partendo dall'opera di Euclide fino alle moderni teorie topologiche.

Il saggio di Marco Andreatta è composto da quattro capitoli:

I. *Lo spazio, un problema filosofico*
II. *Curve*
III. *Superfici*
IV. *La geometria dei giorni nostri*

Fatta eccezione per il primo capitolo, nel quale l'autore introduce i temi che ritiene più importanti per comprendere lo sviluppo del pensiero geometrico e, più in generale, matematico, i capitoli successivi seguono un approccio al tempo stesso storico e cumulativo. Andando avanti con la lettura, infatti, non solo si avanza temporalmente ma si aggiunge, via via, una dimensione agli oggetti matematici considerati. Nel secondo capitolo si parte dal punto, «*ciò da cui partire per costruire tutta la geometria*[12]», come spiega l'autore e poi si passa alle curve, oggetti unidimensionali. Nel terzo si prendono in considerazione le superfici, oggetti bidimensionali e, infine,

[11] https://www.mulino.it/raccontare-matematica
[12] M. Andreatta, *La forma delle cose*, Il Mulino, 2019

nel quarto si presentano le varietà, oggetti matematici che possono avere anche più di tre dimensioni. Questa scansione ricorda il romanzo *Flatlandia* del reverendo inglese Edwin Abbott. Opera satirica pubblicata nel 1882 *Flatlandia* descrive gli usi e i costumi di tre mondi fantastici, la Linelandia, la Flatlandia e la Spacelandia, composte rispettivamente da una, due e tre dimensioni spaziali. Proseguendo in questo parallelismo potremmo dire che, lì dove Abbott ci racconta i rapporti sociali tra le figure geometriche che abitano i mondi fantastici da lui immaginati, Andreatta ce ne descrive invece le relazioni matematiche.

Il lettore di riferimento a cui si rivolge *La forma delle cose* è senza dubbio un lettore che abbia un'infarinatura di concetti geometrici e di nozioni scientifiche. Solo in questo modo, infatti, si possono cogliere i collegamenti tra la matematica e le altre scienze, soprattutto la fisica, che l'autore svolge.

Laura Catastini e Franco Ghione, *Geometrie senza limiti*

Laura Catastini ha insegnato matematica e fisica nei Licei e ora si occupa di ricerca in didattica della matematica. Franco Ghione è professore ordinario di geometria all'Università di Roma Tor Vergata.

Come si evince già dal titolo, anche questo testo ha come protagonista la geometria. A differenza però dell'opera di Andreatta, che si prefigge di comporre un quadro storico della materia, Catastini e Ghione partono da un elemento critico, un "tarlo", come lo definiscono gli autori, che per secoli ha minato le fondamenta della geometria euclidea: il quinto postulato di Euclide.

Il saggio di Laura Catastini e Franco Ghione è composto da sette capitoli più tre appendici:

I. *Euclide e il nostro mondo*
II. *Menelao e l'ambiente sferico*
III. *La vana speranza*
IV. *L'idea di curvatura: Eulero e Gauss*
V. *La geometria assolutamente vera*
VI. *Modelli concreti di mondi non euclidei*
VII. *Senza limiti*

Partendo da Euclide, protagonista del primo capitolo, gli autori presentano tutti i matematici che nel corso dei secoli hanno cercato di dimostrare il quinto postulato di Euclide partendo dagli altri assiomi e postulati euclidei. Come in una detective story, avanzando nel testo, gli autori svelano il mistero presentando le geometrie non euclidee, con un'enfasi simile a quella che, nel già citato *Flatlandia*, accompagna la scoperta del mondo tridimensionale da parte di un abitante del mondo bidimensionale,

Nozioni elementari di algebra e di geometria sono richieste al lettore per poter seguire gli sviluppi concettuali che descrivono il passaggio dalla geometria euclidea a un sistema più generale e del quale la prima non è che un caso particolare. Una matematica che, come spiegano gli autori, può «*avere una qualche cittadinanza anche in una scuola italiana capace di rinnovarsi non tanto sulla base di fumose ricerche pedagogiche, quanto su contenuti come questi, oggi patrimonio indiscusso di una moderna cultura scientifica*[13]».

Umberto Bottazzini, *Infinito*

Umberto Bottazzini è stato professore ordinario di storia della matematica all'Università di Milano. L'approccio all'argomento che dà il titolo al libro, ovvero l'infinito, risente della formazione accademica dell'autore ed è, di conseguenza, soprattutto storico. L'infinito, però, come tiene a precisare l'autore, è un concetto che ha influenzato la filosofia, la letteratura e qualsiasi forma del sapere. Pertanto, non mancano all'interno del libro spunti di riflessione sul rapporto della matematica con le altre discipline.

Il saggio di Umberto Bottazzini è composto da dieci capitoli:

I. *Un premio da 50 ducati*
II. *Gnomon e logos*
III. *La tartaruga, la freccia e i granelli di sabbia*
IV. *Infiniti mondi*
V. *Indivisibili e infinitesimi*
VI. *Un nuovo mondo*
VII. *Finzioni, fantasmi e modi di dire*

---

[13] L. Catastini e F. Ghione, *Geometrie senza limiti*, Il Mulino, 2018

VIII. *Il generale, il filosofo e il matematico*
IX. *Insiemi infiniti, numeri transfiniti e numeri di carta*
X. *«La scienza dell'infinito»*

Il saggio si muove lungo la linea del tempo procedendo linearmente o a salti. In questo incedere, però, non perde mai di vista il tema fondamentale, quell'idea di infinito che Bottazzini presenta, attraverso le metafore di Torricelli e Bailly, come un oceano in cui il pensiero rischia di abissarsi. All'autore interessa soprattutto mostrare le reazioni dei matematici e dei filosofi nei confronti di quest'idea così difficile da domare, tanto che ci sono voluti più di duemila anni dalle speculazioni di Parmenide e Zenone perché Cantor proponesse una teoria dell'infinito.

Il libro di Bottazini è un saggio filosofico, oltre che un testo divulgativo sulla matematica e, per questo, si rivolge a tutti gli intelletti curiosi, anche distanti dalla matematica. Un pubblico che, come ha dimostrato il successo di opere tra cui *Sette brevi lezioni di fisica* di Carlo Rovelli, non si fa intimorire da argomenti apparentemente difficili, se sapientemente stimolato.

Gabriele Lolli, *Matematica come narrazione*

Gabriele Lolli ha insegnato logica all'Università di Torino e filosofia della matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. A differenza degli altri saggi fin qui considerati, il libro di Lolli non è monotematico. Nel saggio infatti si parla degli Elementi di Euclide, di Cantor e anche delle relazioni logiche tra i versi dell'Odissea.

Il libro è composto da sette capitoli più un'appendice:

I. Grandi racconti
II. Il senso delle dimostrazioni
III. Tre indizi
IV. La tradizione
V. Il linguaggio matematico
VI. Le origini dell'argomentazione
VII. Poesia e logica in Euclide

Ciascuno dei sette capitoli di questo saggio è concepito dall'autore come una storia a è sé stante. Storie scelte da Lolli per mostrare al lettore come evolve e si sviluppa il pensiero matematico. «*Raccontare la matematica non vuol dire parlare dell'ambiente, delle persone che si sono dedicate alla matematica, […] neanche fare un riassunto di quello che è ormai acquisito*[14]» avverte l'autore nell'introduzione. Raccontare la matematica, per Lolli, vuol dire mettere nelle mani del pubblico non esperto le "armi" della logica con cui interpretare al meglio le principali scoperte.

Per comprendere alcuni capitoli in cui l'analisi dell'autore si fa più tecnica ai lettori è richiesta una buona preparazione matematica. Tuttavia, come nel caso del saggio di Bottazzini, per approcciarsi a quest'opera l'importante è soprattutto essere curiosi di qualsiasi forma del sapere, prima ancora che della matematica.

2.2 Il campione: le riviste

Anche le edicole, come le librerie, negli ultimi anni hanno iniziato a riempirsi di proposte editoriali a carattere scientifico. A riviste storiche come Sapere e Le Scienze, pubblicate rispettivamente dal 1935 e dal 1968, se ne sono affiancate altre come Focus, Airone o Le Stelle. Per la maggior parte si tratta di riviste che si occupano di tutte le discipline scientifiche proponendo, alcune volte, anche articoli sulla matematica. Le Scienze, in particolare, ha due sezioni dedicate alla matematica: la pagina *Il matematico impertinente*, curata da Piergiorgio Odifreddi e i giochi di logica dei Rudi Mat(h)ematici.

Quantunque le riviste già elencate avrebbero potuto rappresentare un possibile campione, si è andati alla ricerca di riviste che trattassero in maniera specifica argomenti matematici, in modo da avere più articoli da analizzare che rientrassero in un arco di tempo più ristretto. Contemporaneamente si è cercato di non prendere in considerazione riviste circoscritte ad ambiti accademici o a particolari settori di ricerca, seguendo il criterio che un'opera divulgativa deve cercare di parlare al maggior numero di persone possibile.

[14] G. Lolli, *Matematica come narrazione*, Il Mulino, 2018

Una rivista che risponde ai vincoli imposti è senza dubbio Prisma. Nata proprio con l'idea di rivolgersi a un pubblico vasto ed eterogeneo, Prisma è un mensile pubblicato dal centro di ricerca PRISTEM (Progetto Ricerche Storiche e Metodologiche) dell'Università Bocconi di Milano, a partire da ottobre 2018. Questa è una vera e propria rivista divulgativa, tanto nella grafica, colorata e accattivante, che nella trattazione degli argomenti, scelti sempre in virtù della loro vicinanza alla quotidianità dei lettori. All'interno dei suoi numeri Prisma ha affrontato argomenti socioeconomici, come nell'articolo *La scuola non è uguale per tutti*, del numero di marzo 2019, o di stringente attualità, come nell'articolo *Il conteggio del contagio*, del numero di aprile 2020, sull'emergenza sanitaria Covid-19. Temi osservati sempre attraverso la lente della matematica ma con la consapevolezza, parafrasando le parole del direttore della rivista Angelo Guerraggio, che parlare di matematica significa parlare del mondo, «*mostrando come il linguaggio e la cultura scientifica permettano di capirlo meglio, […] di sentirsi cittadini consapevoli*[15]».

La seconda rivista presa in esame è Archimede. Fondata nel 1902 e da allora pubblicata dalla casa editrice Le Monnier, oggi di proprietà del gruppo Mondadori, Archimede è un trimestrale che si rivolge soprattutto ai docenti di matematica delle scuole di secondo grado. Nel 2016, tuttavia, la rivista ha subito un forte rinnovamento, ampliando lo spettro degli articoli proposti e provando a diversificare i linguaggi utilizzati. Ogni numero, infatti, ospita un fumetto sulla storia della matematica, giochi e riflessioni sul mondo della scuola e sulla didattica della matematica. Il pubblico di riferimento e il target a cui la rivista cerca di arrivare è, tuttavia, meno ampio di quello di Prisma. Senza dubbio non aiuta la distribuzione della rivista che, al momento, non prevede una presenza nelle edicole ma solo nelle librerie. Nonostante questi limiti, Archimede è un buon esempio di comunicazione, poiché cerca di fornire spunti e idee per provare a scalfire il muro di incomprensione e ostilità che a volte si crea tra la gente comune e la matematica.

Come nel caso dei libri anche per le riviste si è scelto di considerare un campione abbastanza recente. Si è deciso pertanto di prendere i numeri di Prisma e di Archimede pubblicati nel 2018. Per Prisma ciò equivale a dire che sono stati considerati i primi tre numeri della rivista, ovvero i numeri di ottobre 2018, novembre

[15] A. Guerraggio, *Prisma*, Novembre 2018

2018 e dicembre 2018. Per Archimede, invece, vuol dire che sono stati presi in considerazione il numero da gennaio a marzo 2018, quello da aprile a giugno 2018, il numero da luglio a settembre 2018 e, per finire, il numero da ottobre a dicembre 2018.

2.3 La griglia di analisi

Selezionato il campione di testi da analizzare si è cercato di studiare il modo in cui gli autori hanno deciso di presentare i concetti astratti contenuti nelle loro argomentazioni. L'idea di partenza è stata quella di ricercare alcune caratteristiche o, come da qui in poi verranno chiamate, categorie in grado di definire il livello di astrazione matematica.

Prima categoria: i simboli

La prima categoria presa in considerazione è stata quella simbolica. La matematica, infatti, più di ogni altra disciplina, è identificata con i simboli utilizzati per rappresentarla. Nella comunicazione tra matematici i simboli vengono usati senza che sia necessario spiegarli e il loro impiego è puramente convenzionale. Al contrario, per il pubblico di non esperti, i simboli possono avere diverse interpretazioni che scaturiscono dal proprio vissuto e delle proprie conoscenze.

A prescindere dalla percezione del singolo lettore, inoltre, i simboli stessi possono essere suddivisi in diverse tipologie. Secondo il filosofo americano Charles Sanders Peirce i simboli fanno parte di una più grande famiglia di enti, quella dei segni. Di questo gruppo i simboli, intesi come segni convenzionali, sono la manifestazione più astratta, in quanto non mantengono nessuna somiglianza o corrispondenza con l'oggetto che rappresentano. Ne è un esempio il simbolo +, che da quando è stato introdotto ha perso qualsiasi legame con il concetto rappresentato. Il simbolo + è un'eredità della congiunzione latina *et*, un tempo utilizzata per indicare proprio la somma.

Oltre ai simboli, continua il filosofo americano, esistono anche gli *indici* e le *icone*. Entrambe queste tipologie appartengono a un livello di astrazione più basso, in quanto hanno un legame più forte con l'oggetto rappresentato. Per le icone questo legame è dovuto a una somiglianza del segno con il concetto che si vuole rappresentare, come nel caso dell'infinito ∞. In questo caso è proprio la forma, una linea chiusa senza un inizio e una fine, a rendere l'idea di infinito. Peirce fa anche un altro esempio che, a prima vista, può sembrare poco chiaro, quello delle formule algebriche. Ci si potrebbe aspettare che le formule siano dei simboli, tuttavia, come precisa il filosofo americano, anche se sono composte da simboli, le formule esprimono delle relazioni tra le diverse parti che le compongono. Questo le porte ad avere uno schema riconoscibile, dal quale è possibile dedurre le regole che le contraddistinguono, come avviene, ad esempio, per la somma algebrica $x + y$.

Gli indici, invece, non conservano una somiglianza con l'oggetto rappresentato ma una corrispondenza, ovvero una particolare operazione da svolgere. Per questo motivo, gli indici sono più astratti delle icone. Un esempio è rappresentato dalla coppia di elementi $\{x, y\}$. Questa simbologia comunica al lettore l'idea astratta di mettere insieme due quantità, in questo caso x e y, aiutandolo a svolgere quest'operazione mentalmente. Un altro esempio è rappresentato dalle lettere che in geometria "indicano" i vertici di una figura. E ancora, gli "indici" al pedice che denotano un particolare elemento di una successione, come 1 nel caso di t_1, se ci si sta riferendo al primo elemento di una successione di istanti di tempo diversi.

Quanto detto si può schematizzare nella seguente scala che va dagli elementi meno astratti a quelli più astratti.

Livello di astrazione	Indicatori
1	Icone
2	Indici
3	Simboli

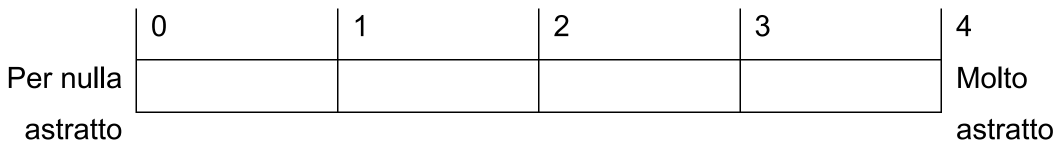
Considerare come indicatori solamente le tre tipologie simboliche su elencate lascia, tuttavia, ancora dei margini di definizione su quella che si può ritenere una trattazione molto astratta e una trattazione poco o per nulla astratta. Innanzitutto, occorre definire un livello zero di astrazione. Questo livello può essere rappresentato dall'assenza di qualsiasi simbolo matematico, ovvero una trattazione completamente testuale.

Tra il livello zero di astrazione e quello rappresentato dalle icone occorre poi inserire un ulteriore livello che tengo conto di tutti quelle rappresentazioni che non rientrano nelle categorie di Peirce ma che aiutano il lettore a comprendere un concetto o a interpretare dei dati. È il caso di immagini, grafici e schemi. Certamente più efficaci dei simboli, degli indici e delle icone, queste rappresentazioni hanno delle controindicazioni che si ripercuotono sul rigore. Un grafico letto in maniera erronea può confondere o far passare un messaggio completamente diverso dalle intenzioni dell'autore. Alcune immagini possono instillare nella mente del pubblico non esperto delle misconcezioni, delle idee sbagliate, come credere che l'unico modo di rappresentare delle frazioni su una torta sia quello di tagliarla in spicchi di uguale forma.

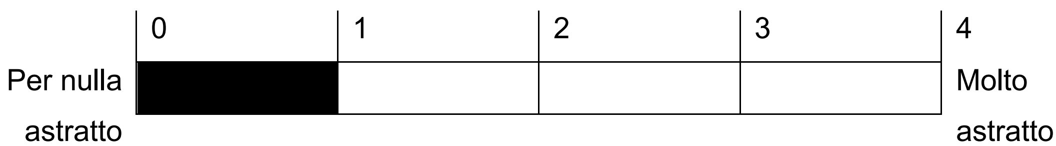
Con i due livelli di astrazione aggiunti ai precedenti si ottiene la seguente scala.

Livello di astrazione	Indicatori
0	Assenza di simboli
1	Rappresentazioni
2	Icone
3	Indici
4	Simboli

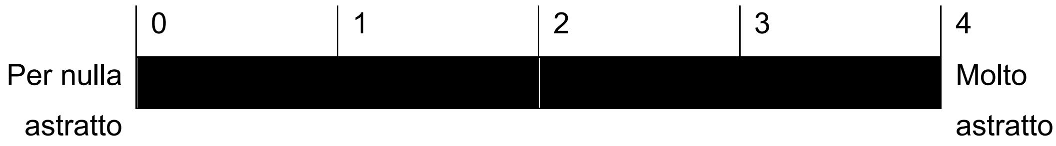
Servendosi di questa scala si può provare ad analizzare il livello di astrazione di un testo osservando quale dei cinque indicatori è maggiormente presente e attribuendo al testo in esame il valore riportato sulla scala. Per visualizzare i risultati si può usare una barra divisa in quattro parti uguali come quella raffigurata di seguito.



Se nel testo non sono presenti simboli matematici al testo si assegnerà valore 0 e la barra verrà lasciata così com'è. Se sono presenti soprattutto rappresentazioni al testo si assegnerà valore 1 e la barra verrà riempita fino alla tacca corrispondente.



Se, invece, a prevalere sono soprattutto i simboli si avrà il livello più astratto, cioè 4 e la barra verrà riempita fino all'ultima tacca:



Seconda categoria: gli esempi

La seconda categoria utilizzata per studiare il livello di astrazione dei testi analizzati si basa sugli esempi. Generalmente gli esempi vengono impiegati per avvicinare al lettore un argomento che si ritiene distante. Più un esempio è vicino all'esperienza quotidiana, più l'argomentazione può considerarsi concreta e, di conseguenza, meno astratta.

Soprattutto nei primi anni di insegnamento della matematica si usano esempi fortemente calati nel mondo reale, proprio perché, quando ancora non si è sviluppata una capacità di astrazione, una situazione verosimile, presa dall'esperienza quotidiana, può aiutare a comprendere concetti astratti. Gli esempi calati nel mondo reale, però, non sono tutti uguali. Alcuni, in virtù della propria generalità, sono più vicini all'esperienza comune dei lettori rispetto ad altri. Anche chi non ha mai guidato una macchina, comprende che la distanza tra due punti di una pista da corsa è un esempio di spazio percorso da un oggetto in movimento. Questo perché tutti hanno un'esperienza diretta o indiretta del moto di un'automobile.

Più l'esempio perde di generalità e diventa specifico di un certo ambito o di una categoria ristretta di persone, più l'esempio diventa astratto e meno concreto. L'esempio della lotteria per spiegare il calcolo combinatorio è sicuramente una situazione calata nel mondo reale, ma non è scontato che tutti abbiano un'idea di come si svolge una lotteria.

Rendendo ancora più specifico l'ambito di riferimento, si può ottenere una terza tipologia di esempi, ovvero quelli che si riferiscono alle discipline artistiche. Che la matematica abbia un ruolo centrale nello studio delle scienze naturali come la fisica o la chimica è evidente. Esistono comunque legami della matematica anche con forme artistiche come la musica o la pittura. Fin dai tempi di Pitagora era infatti risaputo che tra i suoni di due note musicali sussiste un rapporto matematico. Nel rinascimento, poi, gli artisti erano a conoscenza delle regole geometriche della prospettiva per riprodurre su una tela bidimensionale la profondità. Tra le opere che illustrano bene questo legame è interessante citare il cortometraggio della Walt Disney *Paperino nel mondo della matemagica*, perché dimostra che la conoscenza matematica può essere trasmessa anche con un linguaggio, come quello del cartone animato, apparentemente distante dal rigore come quello del cartone animato.

Un’altra tipologia di esempi meno concreta, se paragonata a quelle viste prima, è quella rappresentata dai casi studio. Immaginiamo di enunciare le proprietà dei triangoli. L’idea di triangolo, in questo caso, rappresenta il livello più alto di astrazione, mentre un triangolo particolare, preso per applicare le proprietà a un caso specifico, è l’esempio usato per rendere più chiara e comprensibile la spiegazione.

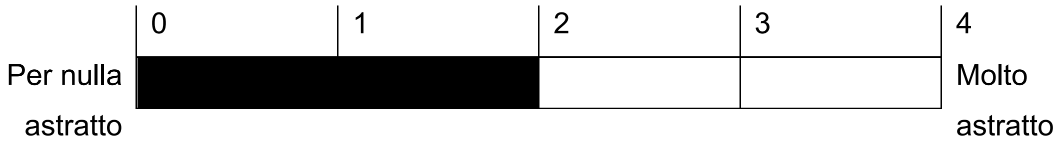
Nella seguente tabella sono raggruppate le diverse tipologie di esempi prese in considerazione. In particolare, il livello più alto di astrazione è stato assegnato al caso di una trattazione in cui gli esempi sono del tutto assenti.

Livello di astrazione	Indicatori
0	Esempi reali vicini al pubblico
1	Esempi reali distanti dal pubblico
2	Esempi nell’arte
3	Esempi matematici e casi studio
4	Assenza di esempi

Come per la precedente categoria di indagine, servendosi di questa scala si può analizzare il livello di astrazione di un testo osservando quale dei cinque indicatori è maggiormente presente e riportando il valore corrispondente su una barra divisa in quattro parti uguali come quella raffigurata di seguito.

	0	1	2	3	4
Per nulla astratto					Molto astratto

Se, mettiamo caso, nel testo prevalgono esempi nell’arte il testo avrà, per questa categoria, un livello di astrazione pari a 2 e la barra sarà riempita per metà lunghezza.



Terza categoria: le metafore

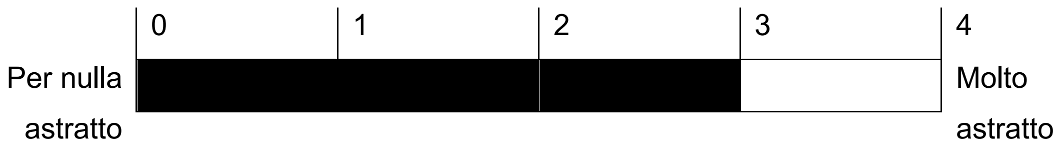
La terza e ultima categoria considerata è quella della metafora. Come nel caso delle rappresentazioni simboliche anche le metafore possono rischiare di allontanare la trattazione dal rigore. Di contro, le metafore rendono “visibile” un concetto, un’idea o una sensazione, poiché ancorano queste entità astratte a immagini pregresse del lettore. Nella *Divina Commedia* Dante utilizza la metafora della «*selva oscura*» per riferirsi alla perdizione nella quale sentiva di essersi smarrito e, così facendo, offre al lettore la possibilità di immaginare quale fosse il suo stato d’animo, anche senza conoscere le sue pene. Per la matematica vale lo stesso meccanismo, in quanto una metafora è utile per afferrare un concetto pur se non lo si comprende appieno.

Nell’analisi svolta in questo elaborato, si è preso in considerazione, lì dove presente, l’uso di un linguaggio figurato, trattandolo, in senso ampio, come una metafora. Un esempio è il disco di Poincaré, presente nel libro *Geometrie senza limiti* di Laura Catastini e Franco Ghione, che è una rappresentazione metaforica di uno spazio iperbolico su una geometria euclidea.

Un modo per distinguere le metafore è quello di considerare i campi semantici delle immagini utilizzate e valutare la loro distanza dagli oggetti della matematica. Prendendo spunto dalla suddivisione utilizzata nel caso degli esempi, si può realizzare una scala formata da cinque livelli dove il livello 0 corrisponde alle metafore appartenenti a campi semantici vicini al mondo reale, mentre il livello più alto di astrazione è quello contraddistinto dall’assenza di metafore.

Livello di astrazione	Indicatori
0	Metafore reali vicine al pubblico
1	Metafore reali distanti dal pubblico
2	Metafore nell’arte
3	Metafore scientifiche e matematiche
4	Assenza di metafore

Anche in questo caso si può vedere quale dei cinque indicatori è maggiormente presente, assegnare il valore trovato al testo e riempire la barra fino alla tacca corrispondente. Se, ad esempio, nel testo prevalgono metafore scientifiche e matematiche il testo avrà, per questa categoria, un livello di astrazione 3.



CAPITOLO 3 Analisi e risultati: i saggi

3.1 Marco Andreatta, *La forma delle cose*

Prima categoria: i simboli

Fatta eccezione per il primo capitolo, nel saggio *La forma delle cose*, c'è una costante presenza di elementi simbolici. Per la maggior parte dei casi si tratta di equazioni algebriche e figure geometriche, come è logico attendersi da un libro che si occupa di geometria.

Presentando la griglia di analisi si è detto che le formule matematiche sono da considerarsi come icone, in quanto la loro struttura permette di ricavare le relazioni che sussistono tra i simboli che ne fanno parte. Il motivo per il quale un autore sceglie di riportare una formula è la ricerca di rigore, chiarezza ed esaustività. Non è un caso che, nel saggio di Marco Andreatta, una delle situazioni in cui le formule e le equazioni sono impiegate è all'interno di esempi e casi particolari citati dall'autore. Questa caratteristica si può notare in molte parti del testo, tra cui le pagine 64 e 71 del secondo capitolo Qui, infatti, troviamo le seguenti espressioni:

> *Ad esempio, l'equazione $3x - 2y + 6 = 0$ descrive una retta, mentre l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ descrive un cerchio.* [Andreatta 1]
>
> *Un altro esempio di punto singolare è dato dalla curva di equazione $y^2 - x^3 = 0$.* [Andreatta 2]

Come mostrano questi due esempi il pregio delle formule è quello di sintetizzare in poche righe proprietà astratte note a tutti coloro che padroneggiano, in questo caso, il linguaggio formale dell'algebra. Tuttavia, proprio la necessità di un bagaglio di conoscenze pregresse rappresenta un limite quando la comunicazione si rivolge a un pubblico di non esperti. Per questo motivo l'efficacia di una formula sarà sempre inferiore a quella di un esempio, o una metafora, che descrive un'immagine concreta e vicina al vissuto del pubblico.

Un altro uso delle formule all'interno del libro è nelle dimostrazioni. A pagina 90, per esempio, l'autore ricava, attraverso passaggi algebrici, l'equazione differenziale della *brachistocrona*. La brachistocrona è la curva che corrisponde al percorso più rapido per spostarsi tra due punti che si trovano ad altezze diverse come gli estremi di uno scivolo. A pagina 151, invece, Andreatta descrive in che modo, attraverso il calcolo differenziale, si possa ottenere la mappa conforme denominata *proiezione di Mercatore*. Per proiezione di Mercatore si intende un particolare sistema di coordinate che permette di rappresentare un mappamondo su una carta geografica, associando a ciascun punto della superficie sferica, tranne i poli, un punto del piano.

Se, parlando delle formule presenti nel saggio, ci siamo soffermati sulla componente iconica del saggio, con le dimostrazioni e le definizioni geometriche ci si avventura nel mondo degli indici. Ne è un esempio la figura del triangolo rettangolo presente nel secondo capitolo a pagina 52 (figura 2).

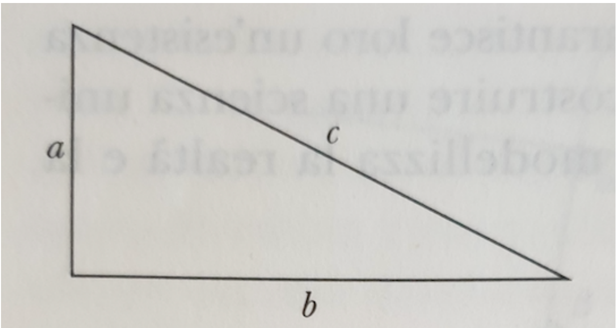


Figura 2. Un triangolo di lati a, b e c tratto dal libro "La forma delle cose" di Marco Andreatta.

In questa figura, che l'autore utilizza per introdurre il teorema di Pitagora, le lettere *a*, *b* e *c* sono indici in quanto indicano e focalizzano l'attenzione del lettore sui tre lati del triangolo.

Due pagine prima dell'esempio appena riportato si trova un altro esempio di indici, questa volta riferiti agli angoli (figura 3).

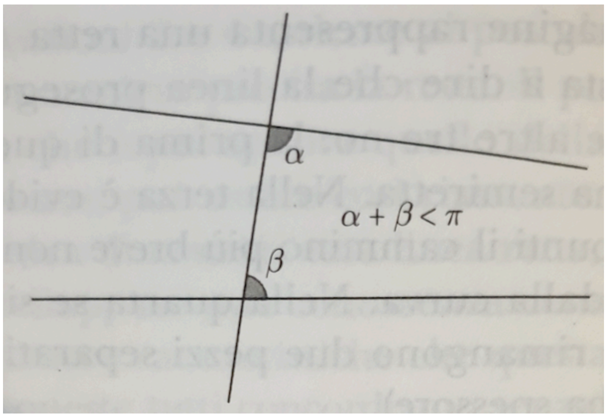


Figura 3. Rappresentazione di due angoli individuati da una retta che incide su altre due rette, tratta dal libro "La forma delle cose" di Marco Andreatta.

Le lettere *α* e *β* sono indici in quanto indicano e segnalano, all'attenzione del lettore, i due angoli evidenziati. Si tratta dei due angoli che Euclide menziona nel quinto postulato quando descrive le condizioni per cui due rette come quelle rappresentate nella figura, se prolungate, a un certo punto si incontrano.

Molto inferiore a quella di indici e icone è la presenza di simboli convenzionali e rappresentazioni. Nel terzo capitolo, a pagina 142, si trova un esempio di notazione simbolica quando Andreatta parla della curvatura di una superficie, un concetto sviluppato nell'800 dal matematico tedesco Carl Friederich Gauss. Nel testo si legge:

> *Gauss notò che è meglio assegnare un segno (+ o −) all'area A' nel modo seguente. Il bordo dell'intorno circolare è una curva circolare sulla superficie che viene mandata su una corrispondente curva circolare sulla sfera. Percorriamo in senso antiorario il cerchio sulla superficie e osserviamo come viene percorsa in corrispondenza la curva sulla sfera: se in senso antiorario moltiplicheremo l'area per 1, se invece viene percorso in senso orario moltiplicheremo l'area per −1. Il segno dunque dipende da come viene preservata l'orientazione attraverso la mappa di Gauss.* [Andreatta 3]

In questo caso i simboli "+" e "−" sono convenzionali perché Gauss sceglie arbitrariamente i segni da associare al verso di percorrenza sulla curva circolare. Arbitrarietà che viene successivamente estesa al segno dell'area A'. Si potrebbe pensare che il simbolo “−” sia un’icona visto che conserva una somiglianza con −1 ma si deve tener conto che il simbolo è riferito all’area A’ ed è con quest’oggetto che, secondo la teoria di Peirce, deve conservare una certa somiglianza.

Parlando di rappresentazioni abbiamo detto che con questo termine ci riferiamo a immagini, o grafici, vicini al vissuto del lettore. che lo aiutano a visualizzare dei dati o dei concetti astratti. Come anticipato, nel testo che stiamo analizzando ci sono poche rappresentazioni di questo tipo, alcune immagini e nessun grafico. Un esempio significativo si trova nel capitolo quattro, a pagina 204, dove sono riportate le seguenti immagini (figura 4).

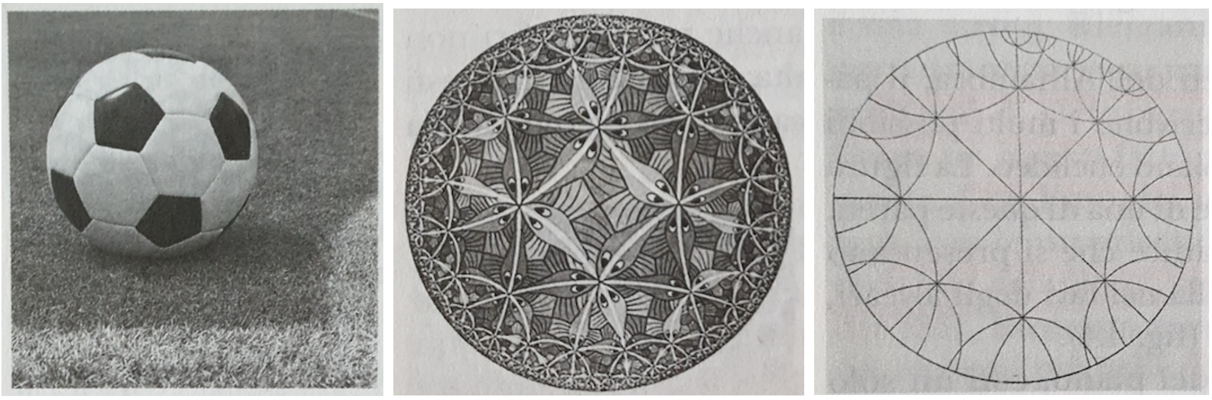


Figura 4. Da sinistra a destra sono raffigurati un pallone da calcio, la riproduzione di un’opera di Escher e una tassellatura di un disco iperbolico. Le immagini sono tratte dal libro “La forma delle cose” di Marco Andreatta.

La caratteristica comune alle tre figure è quella di essere delle rappresentazioni di come una superficie può essere ricoperta con una o più forme geometriche (tasselli) senza sovrapposizioni. I tre casi riportati dall’autore rispecchiano perfettamente tre indicatori che abbiamo scelto per catalogare gli esempi e le metafore: esempi/metafore reali vicini al pubblico, esempi/metafore nell’arte, esempi/metafore matematiche. Il pallone da calcio è sicuramente la rappresentazione meno astratta, poiché è un’immagine che chiunque ha in mente. Il quadro di Escher è, invece, una conoscenza condivisa da un numero più piccolo di persone. Tuttavia, la capacità di un’opera d’arte è quella di instaurare un legame emotivo con chi osserva e, attraverso questo legame, veicolare il concetto astratto. Per concludere, la tassellatura del disco iperbolico è la più astratta delle tre rappresentazioni, in quanto gli unici elementi presenti nell’immagine sono linee e curve geometriche.

Un secondo esempio di rappresentazioni si trova nel terzo capitolo a pagina 124 (figura 5).

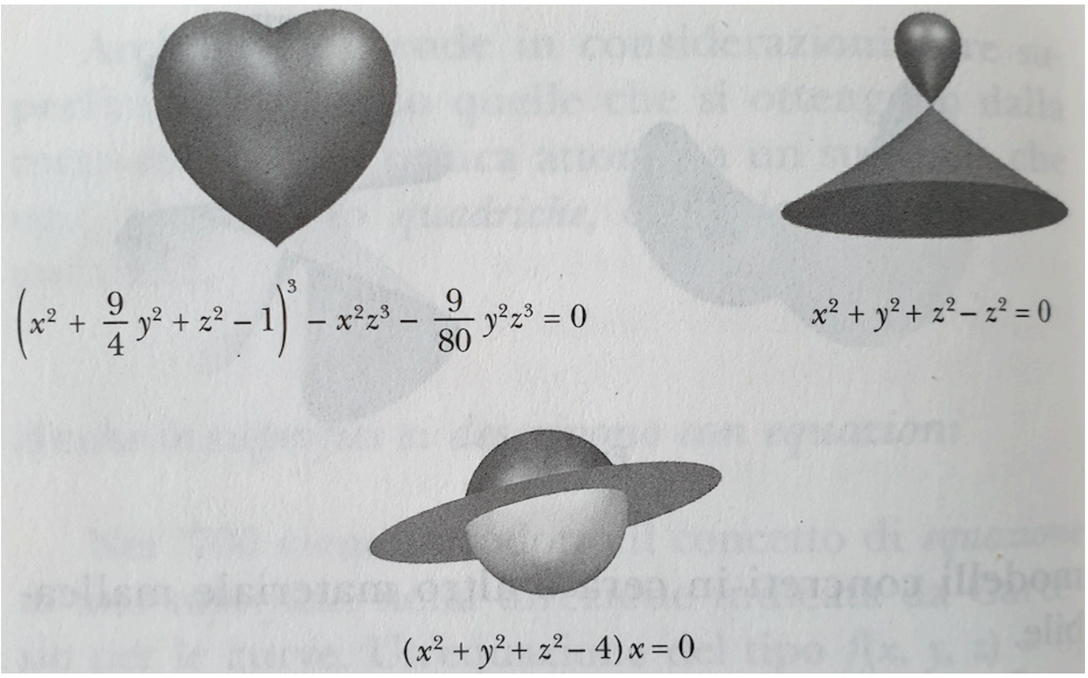
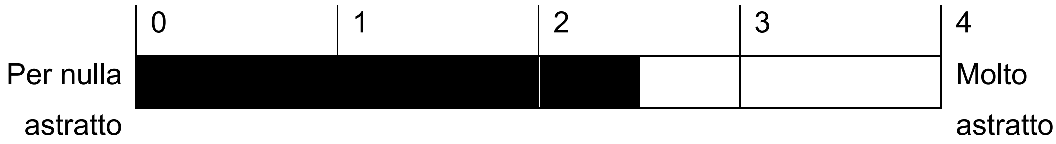


Figura 5. Particolari tipo di superfici e le equazioni corrispondenti. L'immagine è tratta dal libro "La forma delle cose" di Marco Andreatta.

Queste rappresentazioni sono particolari esempi di superfici realizzate con un software che permette di visualizzare diversi tipi di figure geometriche. La particolarità di forme come la prima in alto a sinistra, o quella nella seconda riga, rievocano alla mente immagini familiari e sono una scelta molto efficace per trasmettere il concetto di equazione di una superficie. La stessa immagine non sarebbe stata efficace se al posto della forma di un cuore o di un pianeta si fossero usate delle forme meno legate alla realtà. La presenza delle equazioni sotto ciascuna immagine evidenzia ancor di più il contrasto tra i segni e le rappresentazioni nella capacità di trasmettere un messaggio.

In conclusione, possiamo dire che l’indicatore maggiormente presente all’interno del saggio, per quanto riguarda la categoria simbolica, è quello delle icone e degli indici. La barra dell’astrazione andrà, dunque, riempita tra il secondo livello (icone) e il terzo livello (indici).



Seconda categoria: gli esempi

Il testo è ricco di esempi. Si può dire che non c’è un solo argomento, tra quelli trattati nel saggio, in cui l’autore non illustri almeno un esempio. Si tratta, nella maggior parte dei casi, di esempi matematici e casi studio. Molto inferiore è il numero di esempi nell’arte o calati nel mondo reale.

Parlando di simboli abbiamo già evidenziato il ruolo preponderante delle formule e delle equazioni all’interno degli esempi utilizzati. Mostriamo alcuni casi, oltre a quelli già citati prima, di esempi algebrici che compaiono, rispettivamente, alle pagine 96 e 97 del secondo capitolo.

> *La curva data dall’equazione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$, ad esempio, non può avere soluzioni tra i numeri reali: infatti il quadrato di un numero reale è sempre positivo e dunque $f(x, y)$ è sempre maggiore o uguale a 1*. [Andreatta 4]

> *Se la retta è data dall’equazione $3x - y + 2 = 0$, assegnando a x il valore p/q si ottiene per y il valore $3(p/q) + 2$ che è razionale.* [Andreatta 5]

Anche la geometria non è da meno e ha i suoi esempi come quello riportato nel terzo capitolo a proposito del metodo di esaustione:

> *Con il metodo di esaustione, ad esempio, si può provare che l’area di un cerchio di raggio r, $A(r)$ è proporzionale al quadrato del suo raggio: $A(r) = \text{costante} \times r^2$*. [Andreatta 6]

o, ancora, nello stesso capitolo:

> *Esistono altre corrispondenze conformi tra la sfera e il piano. Ad esempio la proiezione stereografica (rispetto al Polo nord) che ad ogni punto P della sfera, diverso dal Polo nord, associa il punto del piano tangente al Polo sud ottenuto come intersezione di questo piano con la retta passante per P e per il Polo nord*. [Andreatta 7]

Quelli fin qui mostrati, come detto, sono esempi che ricadano nell'ambito della matematica, come si evince anche dal campo semantico a cui appartiene il linguaggio utilizzato. Quando abbiamo introdotto la griglia di analisi abbiamo detto che questo tipo di esempi ha un livello di astrazione maggiore rispetto agli esempi che prendono spunto dall'arte. In questa seconda categoria ricadono l'esempio, già citato, del quadro del pittore olandese Escher o delle tassellature delle pareti dell'Alhambra, il palazzo arabo di Granada, che, ci spiega Andreatta, «*descrivono i molti possibili modi con cui pavimentare il piano euclideo*[16]».

A un livello di astrazione più basso e più vicino alla concretezza, ci sono poi gli esempi calati nel mondo reale. Una tipologia non particolarmente usata dall'autore che, come detto, nella trattazione ha scelto di affidarsi soprattutto a esempi matematici e casi studio. Gli esempi che riproducono contesti reali hanno, così come le rappresentazioni, un'alta efficacia per la loro vicinanza con il lettore. Questo esempio, presente a pagina 93, chiarisce bene questo aspetto:

> *Supponete di essere alla guida di una macchina su una strada che alterna tratti rettilinei a tratti curvi. Nei tratti rettilinei non avete bisogno dello sterzo, ma se la strada si curva dovete agire su di esso, in proporzione a quanto è larga o stretta la curva. La misura della rotazione dello sterzo ci fornisce dunque la curvatura della strada: quando è 0 la strada è diritta, quanto più lo sterzo è azionato tanto più la strada si allontana dalla linea retta*. [Andreatta 8]

[16] M. Andreatta, *La forma delle cose*, Il Mulino, 2019

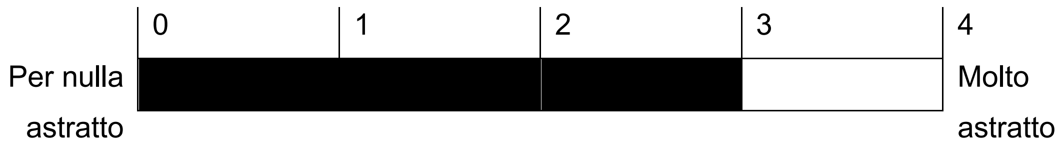
Un altro riscontro si può avere nelle pagine che l'autore dedica alla spiegazione delle geodetiche, ovvero le curve che rappresentano i cammini più brevi che collegano due punti dello spazio. Come scrive Andreatta:

> *Affrontiamo spesso questo problema nella vita quotidiana: ad esempio quando spostiamo degli oggetti su un piano, per minimizzare il lavoro li muoviamo in linea retta. Oppure durante una passeggiata in montagna, se dobbiamo attraversare una valle, cerchiamo il percorso più breve, sapendo di non poter volare ma di dover restare sulla superficie terrestre; la scelta di un buon percorso geodetico dipende dall'esperienza*. [Andreatta 8]

E poche pagine dopo, parlando di geodetiche su una superficie sferica, l'autore usa l'esempio dei voli intercontinentali:

> *Per sapere la rotta del volo intercontinentale da Milano a Los Angeles si tiri un filo sul mappamondo tra queste due città: si scopre che il cerchio massimo deve passare sopra l'Islanda e la Groenlandia. I piloti d'aereo e, soprattutto i sistemi automatici di navigazione, conoscono bene le geodetiche sul nostro globo terrestre*. [Andreatta 9]

Come detto all'inizio, l'indicatore relativo alla categoria degli esempi, maggiormente presente nel saggio, è quella degli esempi matematici, i quali corrispondono al terzo livello. Da quest'evidenza discende che la barra sulla quale possiamo visualizzare il livello di astrazione, sarà riempita fino al terzo livello.



Terza categoria: le metafore

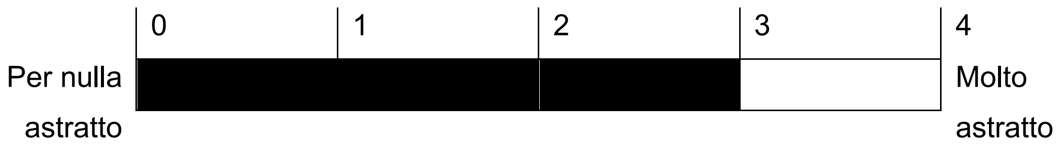
Nel saggio di Marco Andreatta quella delle metafore è la categoria meno presente tra le tre che abbiamo utilizzato in quest'analisi. Presentando gli indicatori relativi a questa categoria abbiamo affermato che il livello di astrazione maggiore è rappresentato da metafore che hanno come parametro di confronto oggetti e concetti matematici. In altre parole, ricadono in questa casistica tutte le analogie tra un concetto astratto e un altro, anch'esso afferente all'universo matematico. Questa tipologia di metafore è quella preponderante nel saggio che stiamo analizzando. Si può capire di cosa si tratta considerando alcuni esempi specifici, come il seguente che si trova a pagina 134 del saggio:

> *Le curve geodetiche su una superficie (completa) sono l'equivalente delle linee rette sul piano: soddisfano cioè le stesse caratteristiche richieste da Euclide alla retta. Infatti, in quanto curve sono lunghezza senza larghezza (definizione 2 di Euclide) e in quanto geodetiche giacciono ugualmente rispetto ai suoi punti (definizione 4).* [Andreatta 10]

Come si evince da quest'esempio l'autore fa uso di un'analogia come se fosse un cammino che collega due concetti matematici espressi in contesti diversi. Nell'esempio citato questo è ciò che succede alle rette sul piano euclideo e alle geodetiche su una superficie sferica. A pagina 192 del libro di Andreatta si può trovare un altro esempio di questo tipo. Dopo aver presentato i principi geometrici e fisici che avevano portato Einstein a ricavare l'equazione di campo della relatività generale l'autore accosta questi principi a quelli che avevano permesso a Galileo di ricavare l'equazione della curva Brachistocrona.

La presenza degli altri tipi di metafore è esigua e si limita a una metafora nell'arte, presente all'inizio del secondo capitolo e a una metafora calata nel mondo reale, che si trova a pagina 111. Per quanto riguarda la prima si tratta di un collegamento che l'autore costruisce tra il concetto di punto matematico e l'immagine letteraria sviluppata dallo scrittore Italo Calvino nel racconto *Tutto in un punto*, della raccolta le *Cosmicomiche*. Il linguaggio del racconto di Calvino è già figurato, in quanto racconta l'origine dell'Universo come conseguenza del sacrificio della signora Phi(n)ko, che, in principio, era concentrata in un punto insieme a tutte le altre persone. Tuttavia, Andreatta estende la metafora al punto matematico, evidenziando analogie con il punto primordiale dal quale Calvino fa partire la sua storia. L'altra metafora, a cui facevamo riferimento, è quella che Andreatta usa per paragonare a «*un pezzo di stoffa flessibile e inestensibile*» una superficie rigata, ovvero una superficie tale che «per ogni suo punto passa una retta contenuta sulla superficie».

In conclusione, dal momento che le metafore presenti in questo saggio sono soprattutto metafore matematiche, l'indicatore relativo a questa categoria è quello corrispondente al terzo livello di astrazione e la barra di astrazione può essere rappresentata nel seguente modo.



3.2 Laura Catastini, Franco Ghione, *Geometrie senza limiti*

Prima categoria: i simboli

Trattandosi di un testo che ha come protagonista la geometria, nel saggio di Laura Catastini e Franco Ghione sono presenti molte figure geometriche. Come abbiamo visto analizzando il libro di Marco Andreatta nelle figure geometriche predomina la presenza degli indici, come lati, angoli, vertici, punti e così via.

Un esempio significativo è rappresentato dalla figura che si trova nel terzo capitolo del saggio in questione, a pagina 78, in cui è rappresentato un birettangolo, ovvero un quadrilatero con due lati opposti congruenti e perpendicolari a un solo lato (figura 6).

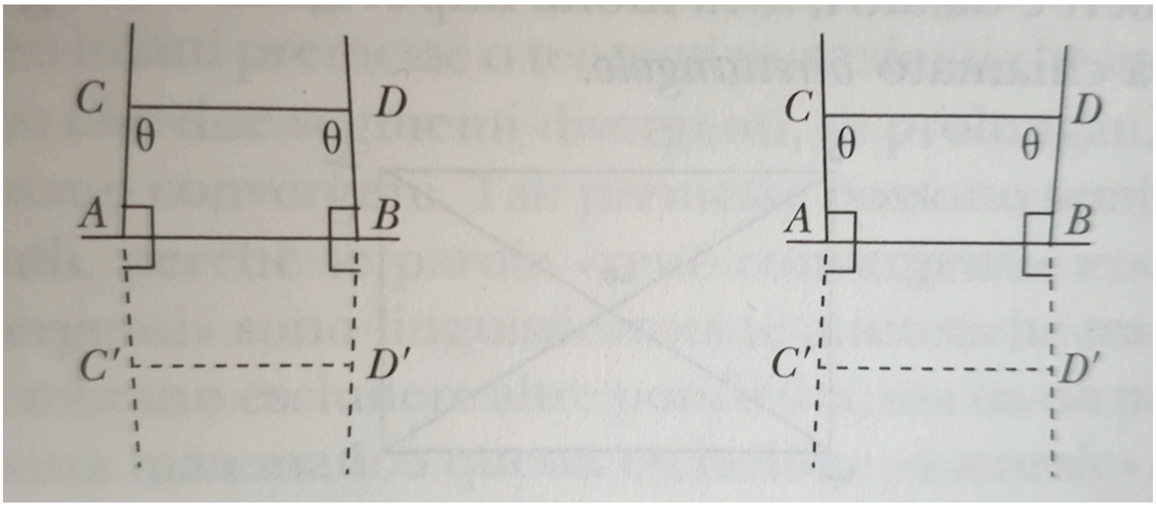


Figura 6. I quadrilateri ABCD rappresentano due birettangoli con angoli alla base acuti a sinistra e ottusi a destra. L'immagine è tratta dal libro "Geometrie senza limiti" di Laura Catastini e Franco Ghione.

Nella figura la lettera greca θ è un indice che individua gli angoli utilizzati dal matematico Al-Khayyam per cercare di dimostrare il quinto postulato di Euclide.

Un altro esempio in cui sono presenti indici che fanno riferimento ad angoli si ha a pagina 61 (figura 7).

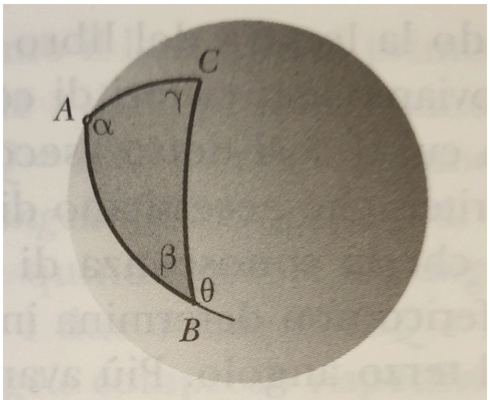


Figura 7. Rappresentazione di un triangolo sferico tratta dal libro "Geometrie senza limiti" di Laura Catastini e Franco Ghione.

In questa figura le lettere greche α, β, γ indicano gli angoli di un triangolo sferico, ovvero un triangolo che giace sulla superficie di una sfera. Nello stesso capitolo sono presenti altre otto figure simili, a dimostrazione del fatto di quanto la tipologia di simboli fin qui discussa, cioè quella degli indici, sia presente in questo saggio.

Meno presenti degli indici sono le formule matematiche, le quali, come abbiamo detto parlando del saggio di Andreatta, sono da considerarsi, secondo la classificazione di Peirce, delle icone. Nel saggio che stiamo ora analizzando le formule vengono impiegate per esprimere relazioni tra angoli. Ne è un esempio la formula che compare a pagina 64 che fa riferimento agli angoli α, β, γ di un triangolo sferico visti prima. Come scrivono gli autori:

> *Se ABC è un triangolo sferico e se α, β, γ sono i suoi tre angoli, misurati in radianti, allora l'area del triangolo è data dalla sorprendente relazione:*
>
> $$\text{Area }(ABC) = r^2\,(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$
>
> *dove r è il raggio della sfera.* [Catastini, Ghione 1]

Un'altra equazione in cui compare una relazione che coinvolge angoli è quella a pagina 143, in cui si presenta l'equazione fondamentale delle geometria iperbolica:

$$\mathrm{tg}\frac{\Pi(\mathrm{x})}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$$

e dove il simbolo $\Pi(\mathrm{x})$ rappresenta un angolo particolare chiamato angolo di parallelismo. Ci sono poi casi in cui le formule accompagnano le figure geometriche come nel caso della figura presente a pagina 150 (figura 8).

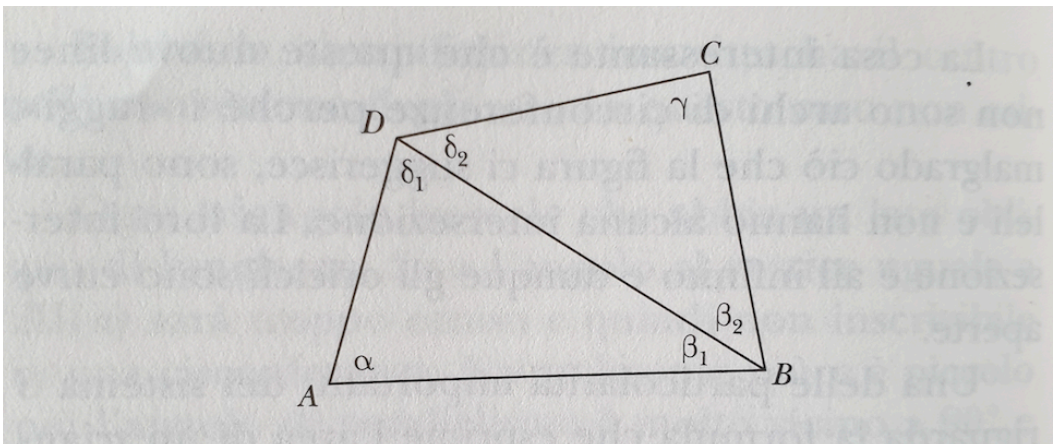


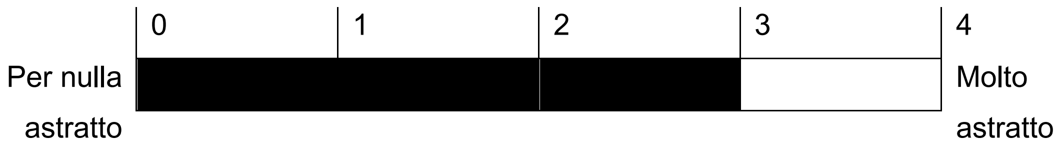
FIG. 5.10. Area $(ABCD)$ = Area (ABD) + Area (BCD) = $k^2\,(\pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1)) + k^2\,(\pi - (\beta_2 + \gamma + \delta_2)) = k^2\,(2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta))$.

Figura 8. Quadrilatero in cui sono indicati i quattro angoli, i quattro vertici e una diagonale. L'immagine è tratta dal libro "Geometrie senza limiti" di Laura Catastini e Franco Ghione.

Come si evince da questo esempio formule ed equazione sono impiegate dagli autori per cercare di rendere esplicite le relazioni che occorrono tra gli elementi di una figura. Ovviamente, trattandosi di un linguaggio codificato la sua comprensione richiede conoscenze matematiche. Tuttavia, come abbiamo detto parlando delle formule, anche un pubblico non esperto può riconoscere alcune relazioni e ricavare informazioni aggiuntive che la sola figura non potrebbe fornire.

Nel saggio di Catastini e Ghione, infine, sono presenti alcune rappresentazioni. In generale si tratta di figure tridimensionali rappresentate su uno spazio bidimensionale: sfere, iperboloidi, paraboloidi e così via. Tuttavia, ci sono due rappresentazioni che occorre citare. Una è il disco di Poincaré, introdotto per la prima volta a pagina 166 e l'altra è la rappresentazione del paradiso dantesco. La prima è uno stratagemma introdotto dal matematico francese Henri Poincaré per rappresentare un ambiente geometrico diverso da quello descritto da Euclide. La seconda, invece, unisce il mondo matematico con quello letterario sottolineando aspetti che spesso sfuggono o non vengono evidenziati a sufficienza.

In conclusione, si può dire che, sebbene nel libro *Geometrie senza limiti*, non manchino altri tipi di simboli e rappresentazioni, prevalgono gli indici. Pertanto, il livello di astrazione associato a questa categoria, secondo la scansione che abbiamo utilizzato, è il terzo e la barra di astrazione si può rappresentare nel seguente modo.



Seconda categoria: gli esempi

In questo saggio prevalgono esempi matematici che gli autori distribuiscono soprattutto nei capitoli centrali del testo: il secondo, il terzo e il quarto capitolo. È in questi capitoli infatti che vengono presentati i tentativi falliti di dimostrare il V postulato di Euclide. Catastini e Ghione mostrano allora alcuni esempi di quelle che definiscono dimostrazioni sbagliate. Si tratta, a detta degli autori, di dimostrazioni che, pur prefiggendosi l'obiettivo di dimostrare il quinto postulato di Euclide servendosi solo dei primi quattro postulati, utilizzano affermazioni che sono formulazioni camuffate del V postulato euclideo.

Accanto a esempi di dimostrazioni sbagliate gli autori riportano tentativi svolti da parte di altri matematici di ampliare lo spettro dei postulati di Euclide. A tal proposito Catastini e Ghione citano Omar Al-Khayyam e Gerolamo Saccheri, i quali si servirono nelle loro argomentazioni del birettangolo visto prima.

Pochi sono, al contrario, gli esempi calati nel mondo reale o nell'arte. Per quanto riguarda i primi possiamo citare che gli autori utilizzano nel primo capitolo del loro saggio, a pagina 37, a proposito della difficoltà di accettare che il V postulato di Euclide non possa essere dimostrato pur descrivendo «*una cosa evidente e vera, come il fatto che se due persone si incamminano in linea retta secondo angoli acuti, interni e dalla stessa parte, allora prima o poi sicuramente si incontreranno».*

Un altro esempio che utilizza oggetti o immagini vicine alla quotidianità del lettore è l'uso delle carte geografiche nell'ultimo capitolo del libro, a pagina 184, per parlare delle varietà riemanniane. Queste varietà, nel caso delle carte geografiche, hanno dimensione due ma possono avere anche più di tre dimensioni.

L'unico esempio invece tratto dal mondo dell'arte è un quadro di Escher, utilizzato per presentare, come nel caso del libro di Marco Andreatta, una tassellatura dello spazio iperbolico (figura 9).

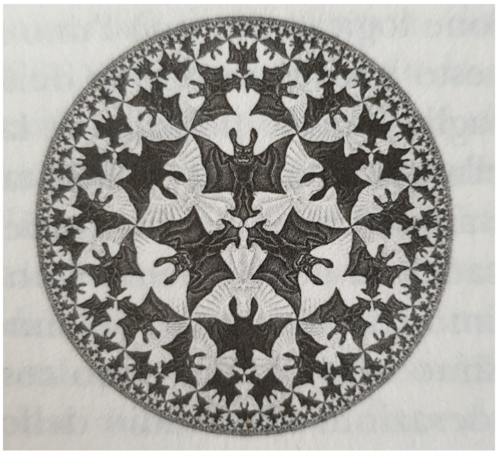
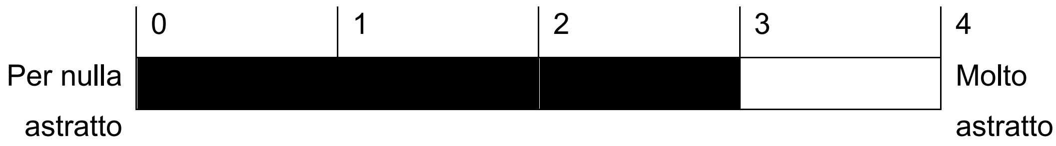


Figura 9. Riproduzione di un'opera di Escher tratta dal libro "Geometrie senza limiti" di Laura Catastini e Franco Ghione.

Il fatto che quest’opera ritorni anche in questo saggio dimostra quanto Escher si sia ispirato alla matematica e quanto le sue opere siano conosciute dai matematici e da chiunque abbia interessi nei confronti di questa disciplina.

Dal momento che come abbiamo detto gli esempi che più sono presenti nel saggio di Laura Catastini e Franco Ghione sono esempi matematici anche per questa categoria si ha un livello di astrazione di livello tre.



Terza categoria: le metafore

Le metafore presenti nel libro *Geometrie senza limiti* sono per la maggior parte parallelismi che gli autori fanno prendendo come metro di paragone la geometria di Euclide. In particolare, nel secondo capitolo si confronta la geometria di Euclide, sviluppata sul piano, con quella su una sfera studiata, tra gli altri, da Menelao. Un esempio si trova a pagina 49 dove gli autori confrontano la disuguaglianza triangolare sferica, secondo cui la somma di due archi di un triangolo sferico è maggiore del terzo arco, con la disuguaglianza triangolare sul piano.

Nei capitoli successivi gli autori, presentando la geometria iperbolica sviluppata da Bolyai e Lobacevskji, paragonano il rapporto che c’è tra la geometria iperbolica e la geometria euclidea con il rapporto che sussiste tra la meccanica newtoniana e la teoria della relatività di Einstein. Nello stesso modo in cui la geometria iperbolica di Bolyai e Lobacevskji ingloba la geometria euclidea come caso particolare, così la meccanica di Newton rappresenta un’approssimazione della teoria di Einstein per valori della velocità molto inferiori al valore della velocità della luce.

Un’altra analogia interna alla matematica sviluppata da Catastini e Ghione e quella tra sfera e pseudosfera di cui, a pagina 159, si legge:

> *Il parametro r svolge, per una pseudosfera, il ruolo che svolge il raggio per una sfera e per questo possiamo chiamarlo «raggio» della pseudosfera.* [Catastini, Ghione 3]

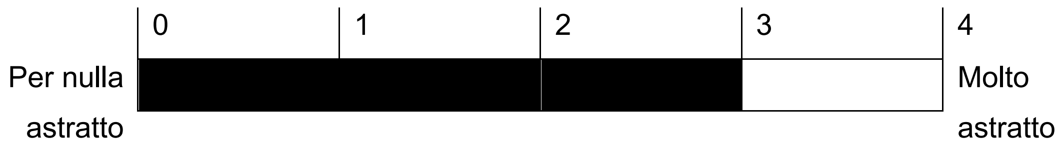
Il disco di Poincaré, precedentemente citato, è, invece, un'immagine metaforica proposta dal matematico francese per rappresentare elementi geometrici che soddisfano i postulati della geometria iperbolica all'interno del piano euclideo. La rappresentazione utilizzata da Poincaré viene così presentata dagli autori:

> *Immaginiamo un ambiente fisico rinchiuso in una grande sfera, all'interno della quale la temperatura non sia uniforme ma sia massima al centro e diminuisca man mano che ci si avvicina al bordo, fino a raggiungere, su di esso, lo zero assoluto e supponiamo anche che tutti gli abitanti e gli oggetti di questo ambiente abbiano uno stesso coefficiente di dilatazione proporzionale alla temperatura, allungandosi e ingrandendosi col caldo e diventando più corti e piccoli proporzionalmente al freddo. Anche il passo degli abitanti, chje supponiamo costante, subirà questo tipo di cambiamento.* [Catastini, Ghione 4]

Quest'immagine ricorda l'universo fantastico creato dal reverendo Edwin Abbott nel suo romanzo *Flatlandia* che abbiamo citato parlando del saggio di Marco Andreatta. Ciò dimostra che si possono comunicare argomenti astratti servendosi di immagini e costruzioni tipiche del racconto e che un tale approccio non è sconosciuto ai matematici e, più in generale agli scienziati, che spesso hanno bisogno di ricorrere a un linguaggio figurato per descrivere degli enti astratti come gli spazi a più dimensioni o le geometrie non euclidee.

La sola metafora presente nel saggio di Catastini e Ghione calata nel mondo reale è presente nel settimo capitolo quando gli autori usano le cartine geografiche come esempio di varietà di Riemann di dimensione due. La metafora è costruita paragonando i nomi delle città presenti su una carta geografica con la notazione simbolica (x, y) utilizzata dai matematici per indicare un punto del piano.

In conclusione, si può dire che nel saggio *Geometrie senza limiti* prevalgano metafore interne alla matematica e per questo motivo, anche per questa categoria, il livello di astrazione è il terzo.



3.3 Umberto Bottazzini, *Infinito*

Prima categoria: i simboli

Analizzando la presenza di simboli, indici, icone e rappresentazione nel saggio di Umberto Bottazzini si osserva che c'è una marcata prevalenza di elementi iconografici. Tra l'altro, sulla copertina stessa del saggio è illustrato il simbolo matematico che rappresenta l'infinito che, come abbiamo detto quando abbiamo introdotto la griglia di analisi, va considerato un'icona.

Altri esempi di elementi iconografici presenti nel saggio *Infinito* sono le successioni e le serie. Anche le successioni e le serie vanno considerate icone nella definizione di Peirce, in quanto hanno una struttura comune che le rende riconoscibili. È il caso della serie presente nel terzo capitolo del libro di Bottazzini, a pagina 74

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

o della serie a pagine 79 nello stesso capitolo del libro:

$$d\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots\right)$$

Oltre alle serie e alle successioni il libro è ricco di rappresentazioni che l'autore prende in prestito dalla storia della matematica. È il caso dello *gnomone*, uno strumento concettuale noto fin dai tempi della setta dei pitagorici, i quali se ne servivano per calcolare i quadrati dei numeri naturali. L'autore presenta questo strumento nel secondo capitolo a pagina 44 (figura 10).

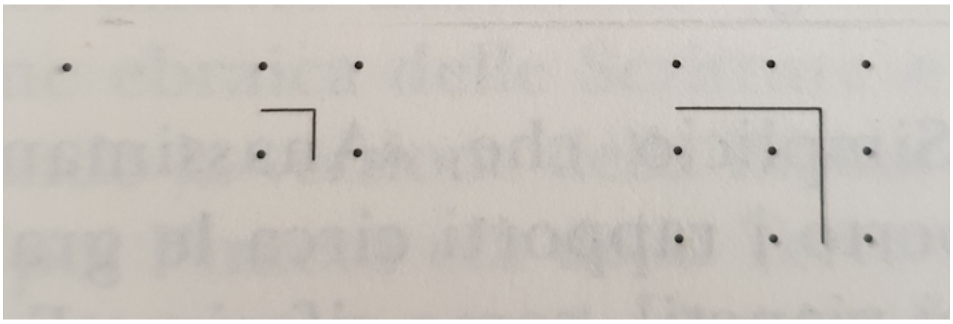


Figura 10. Metodo dello gnomone per calcolare la somma dei primi n numeri naturali. L'immagine è tratta dal libro Infinito di Umberto Bottazzini.

Come si può vedere lo gnomone è una cornice composta da un numero dispari di punti che viene di volta in volta aggiunta alla configurazione precedente. Questa rappresentazione, a sua volta, si ispira all'asta che negli orologi solari indicava l'ora proiettando la sua ombra sul quadrante.

Un'altra rappresentazione storica presente nel saggio di Bottazzini è quella della *polvere di Cantor*, ovvero la rappresentazione, attraverso l'uso dei frattali di Mandelbrot», dell'insieme *ternario* di Cantor. Bottazzini la presenta a pagina 223 del suo saggio (figura 11).

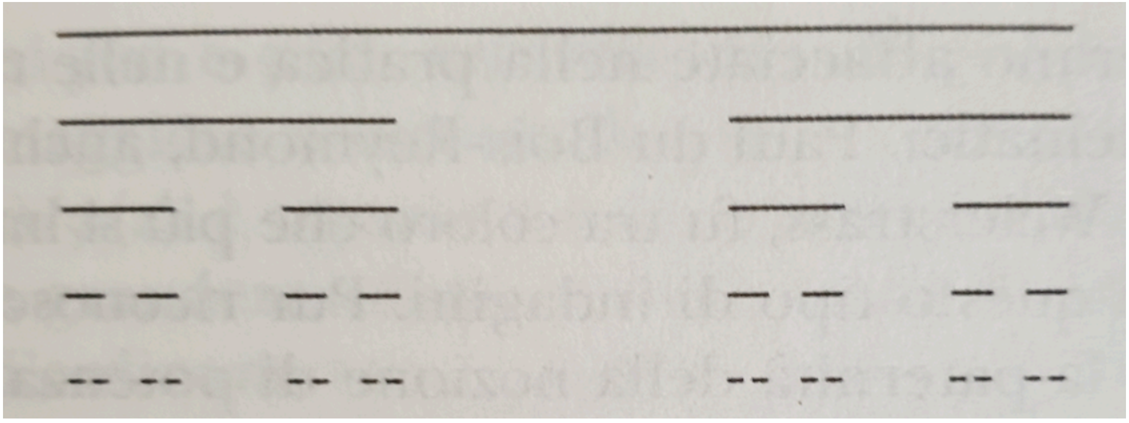
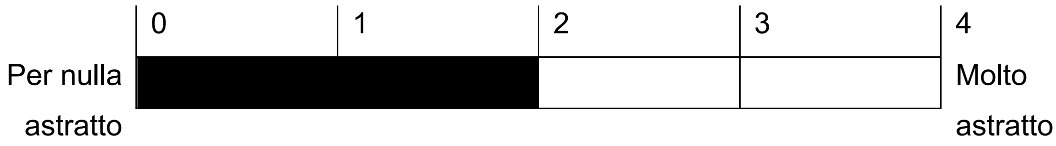


Figura 11. Polvere di Cantor tratta dal libro Infinito di Umberto Bottazzini

La polvere di Cantor si ottiene dividendo un segmento in tre parti uguali e rimuovendo la parte centrale. Successivamente si ripete lo stesso procedimento con le due parti rimanenti e si prosegue allo stesso modo con tutti i segmenti ottenuti.

Per concludere l'analisi della dimensione simbolica del saggio *Infinito* vanno citati gli indici presenti nelle costruzioni geometriche di Keplero, Galilei e Newton, quantunque, come detto nel saggio prevalga la componente iconica. Pertanto, il livello di astrazione, per questa categoria, è il secondo.



Seconda categoria: gli esempi

Il saggio di Umberto Bottazzini è, dei testi analizzati, quello che più attinge esempi e metafore dalla storia della matematica. Infinito è un continuo susseguirsi di riferimenti storici alle teorie matematiche sull'infinito dei secoli precedenti. Per questo motivo, tutti gli esempi e le metafore presenti sono tratti da dalle opere dei matematici del passato.

Questa caratteristica è peculiare di tutti i capitoli del libro di Bottazzini. Per illustrare quello che intendiamo possiamo fare un riferimento preciso a uno dei dieci capitoli che costituiscono il libro. In particolare, mostriamo alcuni esempi presenti nel terzo capitolo del suddetto saggio, dove l'autore illustra due dei quattro paradossi di Zenone contro il movimento.

Bottazzini ci presenta, attraverso indirette testimonianze di filosofi e matematici, il celebre paradosso inventato dal filosofo greco che ha per protagonisti Achille e la tartaruga. Tra i filosofi citati dall'autore c'è Aristotele, del quale Bottazzini presenta il seguente esempio utilizzato dallo stagirita per spiegare il paradosso di Achille e la tartaruga:

> *In termini geometrici, un punto mobile su una retta non può andare da un punto A a un punto B perché dovrebbe raggiungere prima il punto medio C di AB, e poi il punto medio D di CB, e così all'infinito.* [Bottazzini 1]

L’esempio appena illustrato viene tradotto dall’autore, poche pagine dopo, in linguaggio matematico nel seguente modo:

> *assumendo che AB = 1, la soluzione di Aristotele dell’aporia della dicotomia si traduce nella suddivisione di AB in un’infinità di parti corrispondenti a*
>
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$
>
> *La cui somma non diverge all’infinito ma converge a 1 al crescere indefinitamente di n.* [Bottazzini 2]

Lo stesso esempio è espresso In termini geometrici dal matematico del ‘500 Giovanni Battista Benedetti, come Bottazzini spiega a pagina 74:

> *Seguendo l’esempio di Aristotele, dice Benedetti, prendiamo una retta continua au e dividiamola a metà con un punto e. «Non c’è dubbio» che prima di operare la suddivisione la retta ae sia in atto tanto quanto la retta au «anche se non riusciamo a distinguerlo coi sensi». Lo stesso si può dire della metà di ae e poi della metà della metà, dell’ottava parte, della millesima e così via, di modo che «si può ammettere senz’altro l’essenza dell’infinito attuale poiché è così in natura».* [Bottazzini 3]

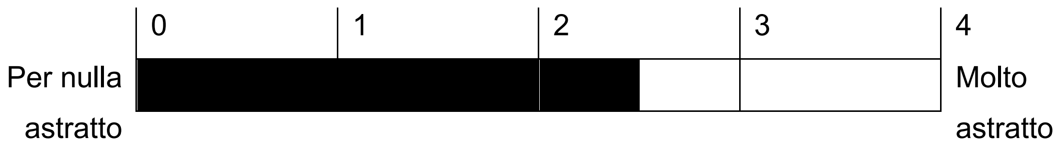
Un'altra versione dello stesso paradosso è quella del filosofo americano Charles Sanders Peirce che l’autore presenta a 79:

> *Un’immagine efficace della corsa di Achille che si conclude raggiungendo la tartaruga è stata proposta dal filosofo pragmatista Charles Peirce supponendo che i due si rincorrano su un tapis roulant che viaggia con la stessa velocità della tartaruga ma in senso contrario alla loro corsa. A un osservatore a terra la tartaruga appare ferma e Achille invece muoversi con velocità V – v, e dunque la raggiungerà in un tempo finito t = d/(V – v).* [Bottazzini 4]

L’autore, tuttavia, non si limita solo a esempi tratti dalla storia della matematica ma considera anche riferimenti letterari come quelli di Borges, Carroll e Sterne. È il caso della versione del paradosso zenoniano che si ritrova tra le pagine del romanzo *La vita e le opinioni di Tristram Shandy gentiluomo* di Sterne:

> *Questi, impegnato nella redazione della propria autobiografia, verso la metà del quarto volume si rende conto che, passato un anno da quando ha cominciato a scrivere, non è andato oltre la prima giornata della sua vita. Dunque, ne ha 364 in più da narrare. «Di questo passo il ritmo della mia vita vissuta risulterebbe 364 volte più rapido della sua narrazione», riconosce Tristram, che più scrive e più avrà da scrivere, e più i suoi lettori da leggere.* [Bottazzini 5]

Come abbiamo messo in evidenza, il saggio di Umberto Bottazzini presenta esempi storici e letterari. Secondo gli indicatori che abbiamo scelto queste tipologie di esempi corrispondono al secondo e al terzo livello di astrazione. Dal momento che non c’è una prevalenza significativa di una o dell’altra tipologia per rappresentare il livello di astrazione per questa categoria la barra è stata riempita tra la seconda e la terza tacca.



Terza categoria: le metafore

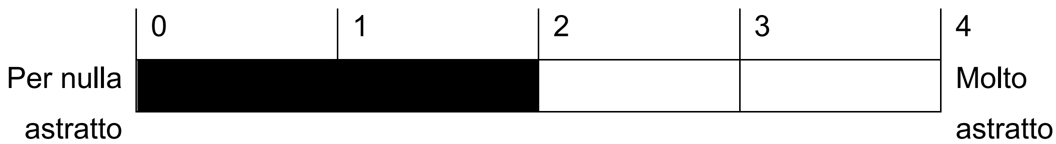
Come per gli esempi, anche nel caso delle metafore l’autore si affida a testi storici. Questo è chiaro fin dall’introduzione dove Bottazzini presenta le immagini metaforiche che gli studiosi del passato hanno attribuito all’infinito. Si parte con la definizione data da Bonaventura Cavalieri che paragona l’infinito a un *immenso oceano,* immagine ripresa da Evangelista Torricelli che, facendo riferimento a Cavalieri scrive: «*non ci inoltreremo però nell’immenso oceano della geometria cavaleriana, ma, con minore audacia, staremo vicini a terra*». Come ci suggerisce l’autore la metafora dell’oceano è ispirata dalle recenti imprese dei grandi navigatori che proprio in quegli anni solcavano i mari, scoprendo nuove terre e accumulando tesori.

Dal momento che nel saggio è preponderante il riferimento a metafore presenti nele opere storiche, come fatto nel caso degli esempi, possiamo prendere in considerazione un capitolo in particolare. In questo caso consideriamo il quinto capitolo del libro di Bottazzini, intitolato *Indivisibili e infinitesimi*. In questo capitolo Bottazzini presenta i risultati ottenuti da Keplero, Cavalieri, Galilei e Torricelli per calcolare il volume di alcuni solidi attraverso l'uso di infinitesimi. Le prime immagini metaforiche sono quelle impiegate da Keplero per descrivere alcuni dei solidi di cui ha calcolato il volume che, come riferisce l'autore, «*egli chiama col nome di frutti – mela, mela cotogna, oliva, limone … – oppure con nomi del linguaggio ordinario, come corna, tiara, turbante, ghirlanda, e così via*[17]».

Presentando invece l'opera di Cavalieri, Bottazzini riporta le definizioni usate dallo stesso Cavalieri per definire l'infinito, paragonato all'oceano e a scogli dai quali mettersi al sicuro come se si stesse conducendo un battello. Secondo Leibniz, invece, scrive l'autore, l'infinito rappresenta un «*labirinto dove molto spesso la nostra ragione si perde*[18]».

Infine, a pagina 119, Bottazzini ci presenta un'altra metafora usata da Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* per rappresentare una figura geometrica ottenuta eseguendo alcune operazioni geometriche. Si tratta della *scodella* di Galileo che si ottiene togliendo dal volume di un cilindro quello di una semisfera inscritta nel cilindro.

Da quanto visto possiamo dire che anche per quanto riguarda la categoria delle metafore il livello di astrazione è il secondo.



[17] U. Bottazzini, *Infinito*, Il Mulino, 2018
[18] Ibidem

3.4 Gabriele Lolli, *Matematica come narrazione*

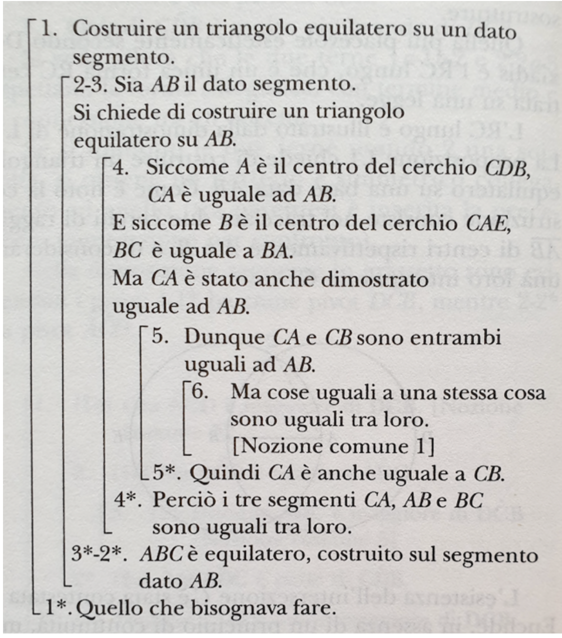
Prima categoria: i simboli

A differenza dei saggi precedentemente considerati quello di Lolli non affronta un unico argomento e, per questo, i capitoli presentano una diversa composizione di simboli, esempi e metafore.

Per quanto riguarda ad esempio la categoria simbolica possiamo distinguere paragrafi del libro in cui questa è più marcata rispetto ad altri. Un esempio è rappresentato dal primo paragrafo, *Una sporta di dimostrazioni*, del secondo capitolo del libro. Qui Lolli vuole mostrare al lettore come non esista un *modello* unico per le dimostrazioni che compaiono nella storia della matematica e, per questo, sceglie di presentare otto esempi di dimostrazioni matematiche. Si tratta di dimostrazioni che l'autore adatta da quelle originali di Cantor, Euclide ed Eulero. Utilizzando l'espressione di Peano possiamo dire che nelle pagine del libro dedicato a queste dimostrazioni il linguaggio utilizzato è quello orizzontale che caratterizza la comunicazione tra matematici. Il risultato è una densa concentrazione di simboli ignoti al pubblico di non esperti che conferisce a questa parte del saggio un alto livello di astrazione. A tal proposito è significativo come l'autore si esprima riferendosi ad alcuni simboli introdotti parlando della teoria degli insiemi e poi ripresi nelle dimostrazioni. «*Ogni cultura ha nomi diversi, a seconda della funzione che svolgono*[19]» scrive Lolli riferendosi ai simboli $\mathbb{N}$, ω e $\aleph_0$, che rappresentano, rispettivamente, l'insieme dei numeri naturali, degli ordinali finiti e la cardinalità di $\mathbb{N}$.

Altri due esempi di dimostrazioni sono riportati nel quarto capitolo mentre nei restanti capitoli si osserva un alternarsi di figure geometriche e schemi. In particolare, gli schemi vengono impiegati da Lolli per costruire un parallelismo tra la struttura narrativa delle dimostrazioni e quella di altri testi tratti dall'oratoria politica o dalla tradizione letteraria, come l'Odissea o l'Iliade (figura 12).

[19] G. Lolli, *Matematica come narrazione*, Il Mulino, 2018

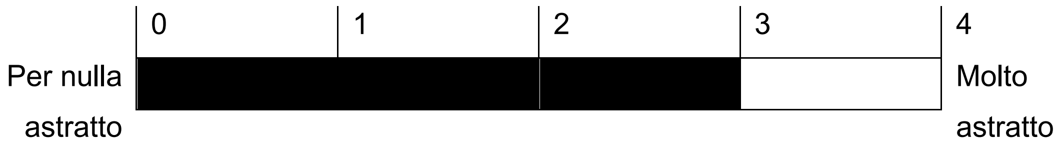


1. Costruire un triangolo equilatero su un dato segmento.
2-3. Sia AB il dato segmento.
Si chiede di costruire un triangolo equilatero su AB.
4. Siccome A è il centro del cerchio CDB, CA è uguale ad AB.
E siccome B è il centro del cerchio CAE, BC è uguale a BA.
Ma CA è stato anche dimostrato uguale ad AB.
5. Dunque CA e CB sono entrambi uguali ad AB.
6. Ma cose uguali a una stessa cosa sono uguali tra loro.
[Nozione comune 1]
5*. Quindi CA è anche uguale a CB.
4*. Perciò i tre segmenti CA, AB e BC sono uguali tra loro.
3*-2*. ABC è equilatero, costruito sul segmento dato AB.
1*. Quello che bisognava fare.

Figura 12. Schema utilizzato per descrivere la struttura narrativa di una dimostrazione. L'immagine è tratta dal libro "Matematica come narrazione" di Umberto Bottazzini.

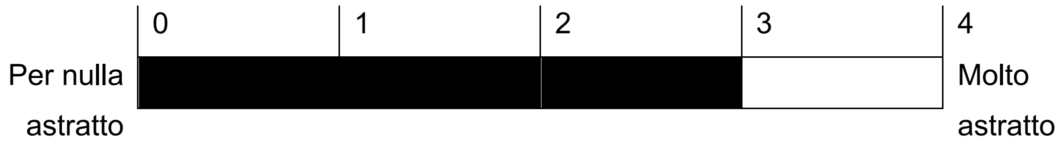
Schemi come questo, così come le formule algebriche, sono delle icone secondo la definizione di Peirce.

Da quanto detto segue che il saggio di Lolli può essere diviso in due parti, la prima nella quale prevalgono simboli e quindi con un livello di astrazione pari a quattro e una seconda parte in cui, invece, prevalgono le icone, con un livello di astrazione pari a due. Il livello di astrazione ha, quindi, un valore intermedio a due e quattro ed è, pertanto, pari a tre.



Seconda categoria: gli esempi

Come abbiamo visto all'interno del libro di Lolli vengono citati alcuni esempi di dimostrazioni matematiche. Da questa osservazione possiamo concludere che la categoria degli esempi è prevalentemente caratterizzata da esempi matematici, anche se, soprattutto nel capitolo quattro, l'autore, confrontando la struttura narrativa delle dimostrazioni con quella di orazioni politiche o passi dei poemi omerici, arricchisce la trattazione con esempi tratti da altre discipline. Il livello di astrazione associato a questa categoria, tuttavia, è il terzo perché i primi tipi di esempi che abbiamo citato prevalgono sui secondi.



Terza categoria: le metafore

Nel saggio di Lolli sono presenti poche metafore e dedicate soprattutto alla matematica come disciplina piuttosto che ad alcuni particolari concetti astratti. Nel primo capitolo del libro, a pagina 20, ad esempio, l'autore paragona la teoria degli insiemi alla teoria fisica del big bang, mentre, poche pagine dopo, riferendosi ancora all'universo generato dalla teoria degli insiemi lo rappresenta come una V e lo confronta con l'universo dantesco.

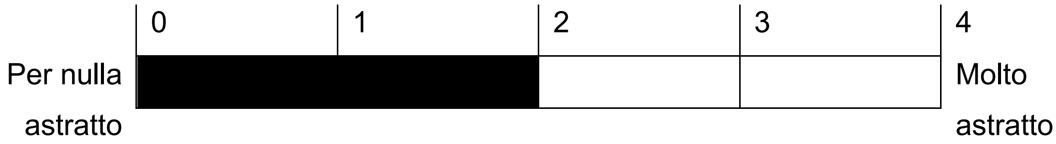
Un'altra immagine utilizzata da Lolli è quella di movimento per indicare gli infinitesimi, ovvero quantità, come le definisce Cauchy nel passo riportato dall'autore, *infinitamente piccole*.

Nel quinto capitolo dal titolo *Il linguaggio matematico*, l'autore si sofferma ad analizzare la simbologia presente nelle dimostrazioni matematiche e riporta il pensiero del matematico David Hilbert:

> *I segni aritmetici, affermava HIlbert con una potente metafora, sono figure scritte e le figure geometriche sono formule disegnate. E nessun matematico potrebbe rinunciare a queste formule disegnate, così come nel calcolo non si può fare a meno di mettere e togliere le parentesi, o di usare altri segni analitici.*
> [Lolli 1]

Infine, tutta l'ultima parte del saggio di Lolli, in cui l'autore riporta le sue conclusioni, è tutto incentrato sul parallelismo tra matematica e poesia. Una metafora, portata avanti nelle ultime pagine del testo, che secondo l'autore si basa sul fatto che la matematica, al pari della poesia, è in grado di condensare in poche righe una grande quantità di pensiero.

Dagli esempi riportati si evince che le metafore utilizzate da Lolli creano dei collegamenti tra la matematica e altre forme del sapere. Secondo la classificazione che abbiamo seguito in questo elaborato, quindi, il livello di astrazione per questa categoria è il secondo.



CAPITOLO 4 Analisi e risultati: le riviste

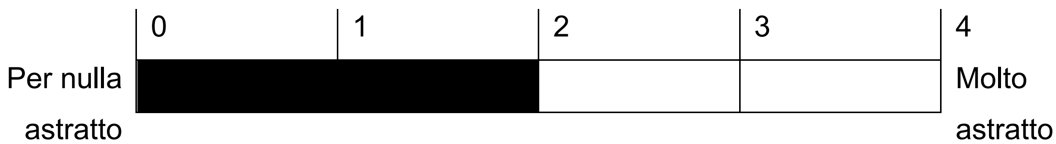
4.1 Archimede, gennaio – marzo 2018

La rivista Archimede, come abbiamo detto, ospita articoli divulgativi insieme ad articoli che si occupano di didattica della matematica e giochi matematici. Per questo motivo, si è resa necessaria una cernita degli articoli adatti alla nostra analisi. Nel caso del numero di Archimede relativo al periodo gennaio – marzo del 2018 gli articoli analizzati sono stati *Aritmetica modulare dantesca* dei Rudi Mat(h)ematici, *Cartografia matematica* di Davide Passaro e Pierandrea Vergallo e *Mind the gap. Sull'ipotesi del continuo* di Samuele Maschio.

Prima categoria: i simboli

I tre articoli considerati presentano differenze nell'uso dei simboli matematici. L'articolo *Mind the gap. Sull'ipotesi del continuo* è quello che senza dubbio utilizza in maniera più abbondante il simbolismo matematico. In particolare, si tratta di simboli convenzionali della teoria degli insiemi e della logica. L'articolo *Aritmetica modulare dantesca*, al contrario, è quello cha fa meno uso di simboli. Al centro, tra queste due opposte scelte di comunicazione, si pone invece l'articolo *Cartografia numerica* che alterna testi privi di formule matematiche e parti dove vengono illustrare le procedure matematiche con i relativi simboli.

Da quanto detto, per il livello di astrazione relativo a questa categoria, si può attribuire, sulla barra che abbiamo utilizzato per analizzare il campione, un valore intermedio.



Seconda categoria: gli esempi

Come nel caso dei simboli, anche per gli esempi si riscontra una differenza tra i tre articoli considerati.

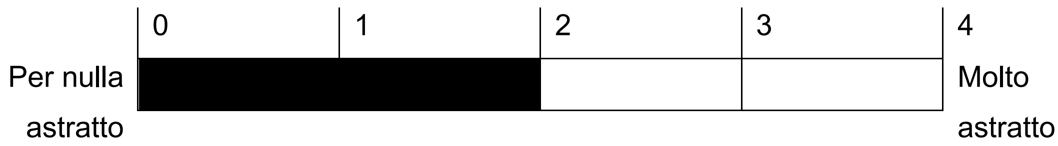
Nell’articolo *Mind the gap. Sull’ipotesi del continuo* l’autore utilizza soprattutto esempi interni all’argomento matematico che sta affrontando come quando, a pagina 57, scrive:

> *Per esempio, tutti gli insiemi aperti non vuoti di reali sono continui e i sottoinsiemi chiusi di R sono finiti, numerabili o continui (e questo indipendentemente dal fatto che esistano sottoinsiemi di R intermedi).* [Maschio 1]

Nell’articolo *Cartografia numerica*, al contrario, sono presenti esempi concreti come quando gli autori, per spiegare il concetto di proiezione, fanno riferimento a un pallone che attraversa il cono di luce prodotto dai fari di un’automobile, o come quando, per riferirsi alle proprietà di una mappa fanno riferimento alle traiettorie delle navi nel mare.

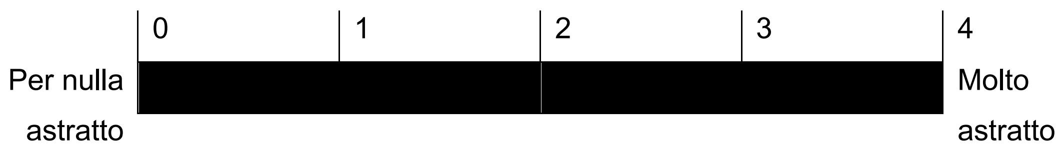
Infine, l’articolo *Aritmetica modulare dantesca*, come già dice il titolo applica l’aritmetica modulare alla Divina Commedia di Dante, proponendo quindi un esempio preso dal mondo dell’arte.

Anche in questo caso possiamo associare un livello di astrazione intermedio.



Terza categoria: le metafore

In tutti e tra gli articoli presi in considerazione non sono presenti delle metafore. Per questa categoria, pertanto, si ha il livello di astrazione massimo.



4.2 Archimede, aprile – giugno 2018

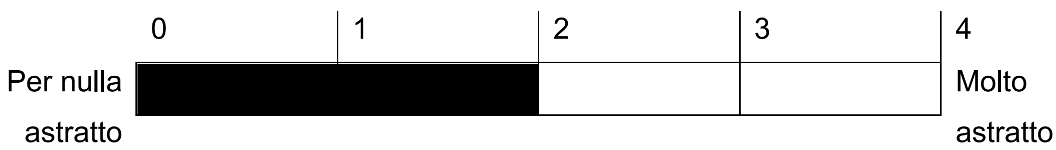
Anche per quanto riguarda questo numero di Archimede, l’analisi ha preso in considerazione solamente tre articoli: *La matematica della crittografia: coppie di numeri primi per l’RSA* di Mario Marobin, *Sezioni coniche: dove tagliare la superficie del cono?* di Mario Pingitore e, per finire, *Matematica e cultura umanistica* di Enrico Rogara e Saverio Tortoriello. Gli altri articoli sono, al contrario, più incentrati sulla didattica o su aspetti epistemologici della matematica.

Prima categoria: i simboli

Nell’articolo che Enrico Rogara e Saverio Tortoriello hanno dedicato agli intrecci tra matematica e discipline umanistiche non è presenta nemmeno un simbolo o una formula matematica. Al contrario, negli altri due articoli il formalismo è molto presente. In particolare, nell’articolo *La matematica della crittografia: coppie di numeri primi per l’RSA* di Mario Marobin si osserva un alternarsi di simboli e icone caratterizzate, queste ultime, da righe in cui sono descritte le operazioni che contraddistinguono il sistema crittografico analizzato.

Nell’articolo *Sezioni coniche: dove tagliare la superficie del cono?* di Mario Pingitore, invece, si riscontra la presenza di indici e icone. In questo caso le icone sono le equazioni algebriche che caratterizzano le relazioni tra i vari parametri considerati. Gli indici, invece, sono le lettere che permettono di riconoscere, sulle figure, la posizione deli angoli e dei punti presi in considerazione.

Da quanto detto segue che il livello di astrazione legato a questa categoria è, indicativamente, un livello equidistante tra il valore massimo e il valore minimo considerato.



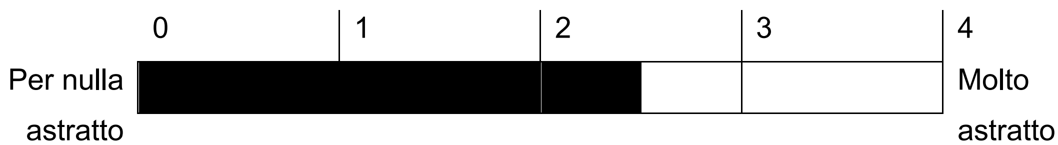
Seconda categoria: gli esempi

Per quanto riguarda la categoria degli esempi si osserva una differenza tra gli articoli sulla crittografia e sulle procedure per sezionare un cono e l'articolo che affronta il tema del legame tra matematica e discipline artistiche. Gli esempi presenti nei primi due articoli citati, infatti, sono esempi numerici e casi studio, accompagnati da stringhe di codice, nel primo caso, e grafici, nel secondo. Al contrario, come suggerisce la scelta del tema, nell'articolo *Matematica e cultura umanistica* gli esempi sono presi dal mondo dell'arte e fanno addirittura riferimento ad alcune opere d'arte. A tal proposito a pagina 86 e pagina 87 leggiamo i seguenti esempi:

> *Picasso fu colpito dalle osservazioni di Poincaré su come fosse possibile rappresentare la quarta dimensione e ne trasse l'idea, divenuta una sorta di bandiera del movimento cubista, che la visione quadridimensionale si potesse realizzare in pittura con la rappresentazione di diverse visioni prospettiche di una stessa su uno stesso quadro, come nel famoso "Ritratto di Dora Maar".* [Rogora, Tortoriello 1]

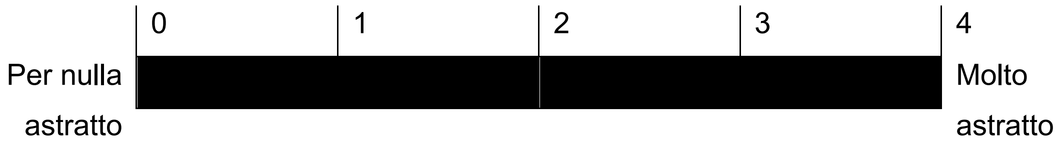
> *A partire dalla seconda metà degli anni Venti, sulla corta del successo della teoria della relatività, la quarta dimensione fu interpretata da molti artisti come una dimensione temporale e la sua rappresentazione collegata al tentativo di rappresentare il movimento. Per un artista come Boccioni la sfida divenne quella di rappresentare il movimento senza separare lo spazio dal tempo, come in "Forme uniche della continuità nello spazio".* [Rogora, Tortoriello 2]

Dal momento che, come abbiamo visto, sono presenti esempi che appartengono sia al secondo, sia al terzo livello di astrazione possiamo rappresentare la barra colorandola fino a un punto posto a metà tra la seconda e la terza barra.



Terza categoria: le metafore

Anche per questo numero della rivista, come nel precedente, in tutti e tra gli articoli presi in considerazione non sono presenti delle metafore. Per questa categoria, pertanto, si ha il livello di astrazione massimo.



4.3 Archimede, luglio – settembre 2018

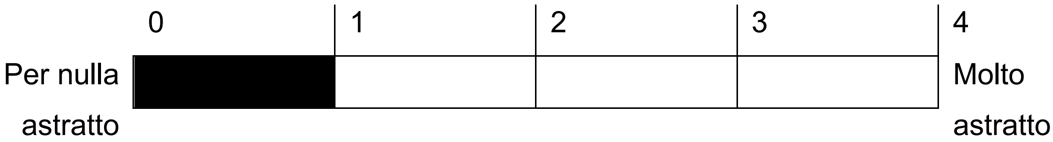
Di questo numero di Archimede gli articoli analizzati sono stati *Un gioco di geometrie armoniche* di Fabio Bellissima, *Matematica da polso* dei Rudi Mat(h)ematici e *Giuseppe Peano* di Elena Rinaldi.

Prima categoria: i simboli

Nell'articolo *Un gioco di geometrie armoniche* sono presenti soprattutto indici, dal momento che l'articolo presenta un gioco che si svolge riportando su quadranti circolari dei numeri e una freccia puntata su uno di essi. Le relazioni tra i numeri rappresentati sui quadranti sono funzionali al gioco che vede sfidarsi alcune squadre, ciascuna composta da due giocatori. Un giocatore ha un quadrante in cui è riportata la freccia ma non sono riportati i numeri, mentre il secondo giocatore ha un quadrante in cui sono riportati i numeri ma non è riportata la freccia. Fornendo alcune indicazioni, il primo giocatore deve fare in modo che il secondo giocatore dica il numero in corrispondenza del quale si trova la freccia.

Nell'articolo dei Rudi Mat(h)matici gli unici simboli presenti sono quelli associati ai numeri romani, mentre nell'articolo scritto da Elena Rinaldi su Giuseppe Peano l'unica formula presenta è l'espressione parametrica della curva di Peano, di cui l'autrice riporta anche una rappresentazione grafica che mostra la natura frattale e ricorsiva di tale curva.

Da quanto detto siamo portati a concludere che negli articoli che abbiamo considerato il livello di astrazione per questa categoria sia basso. Bisogno tuttavia tenere conto del fatto che negli articoli presenti che affrontano tematiche di didattica della matematica il simbolismo è maggiormente presente.



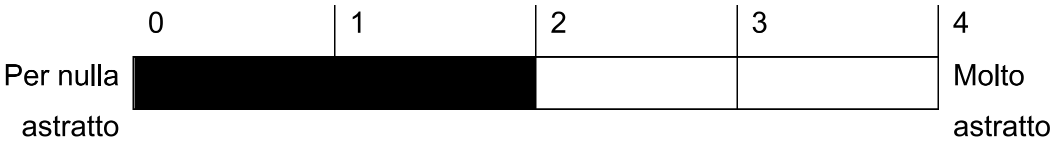
Seconda categoria: gli esempi

Nell'articolo *Un gioco di geometrie armoniche* il gioco proposto dall'autore rappresenta esso stesso un esempio concreto che, nel momento in cui viene svolto in classe, diventa parte della quotidianità degli alunni. Un altro esempio, presente nello stesso articolo, appartiene al mondo della musica, dal momento che l'autore considera la possibilità di applicare il gioco alla scala cromatica delle note.

Gli esempi presenti nell'articolo *Matematica da polso* sono esempi concreti come quando gli autori passano in rassegna i nomi delle strade in cui compaiono i numeri romani, che chiunque può notare camminando per le vie di una qualsiasi città.

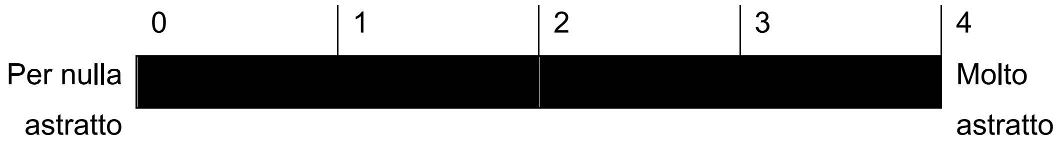
Infine, nell'articolo sul matematico *Giuseppe Peano* gli esempi citati dall'autrice sono esempi matematici come nel caso della curva di Peano.

Da quanto visto, negli articoli analizzati sono presenti diversi livelli di astrazione per quanto riguarda questa categoria. Possiamo, pertanto, supporre di considerare un livello intermedio di astrazione.



Terza categoria: le metafore

Come nel caso delle due riviste precedenti anche negli articoli analizzati per questo numero di Archimede non sono presenti metafore.



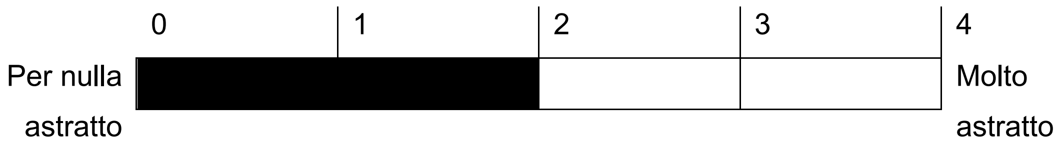
4.4 Archimede, ottobre – dicembre 2018

Dopo aver letto gli articoli di questo numero della rivista Archimede gli articoli che sono stati scelti per la peculiarità di essere articoli scritti con l'intento di divulgare argomenti di matematica, sono stati *La crittografia da Sparta al bancomat* di Emanuele Bottazzi, *Mozart matematico* di Paolo Alessandrini e *Non dire quattro se non ce l'hai nel calco* dei Rudi Mat(h)ematici.

Prima categoria: i simboli

I simboli matematici presenti nel primo articolo considerato sono lettere e cifre che l'autore utilizza per spiegare i diversi sistemi crittografici. Nell'articolo *Mozart matematico* invece si può distinguere una prima parte in cui sono presenti spartiti con note musicali e una seconda parte in cui sono presenti formule e grafici. Infine, nell'articolo dei Rudi Mat(h)ematici gli unici simboli presenti sono quelli che caratterizzano i numeri romani.

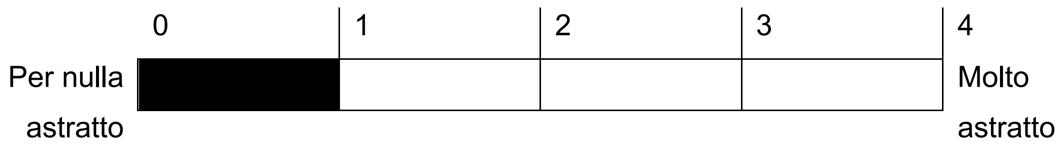
Da quanto detto segue che il livello di astrazione per questa categoria è un livello indicativamente intermedio.



Seconda categoria: gli esempi

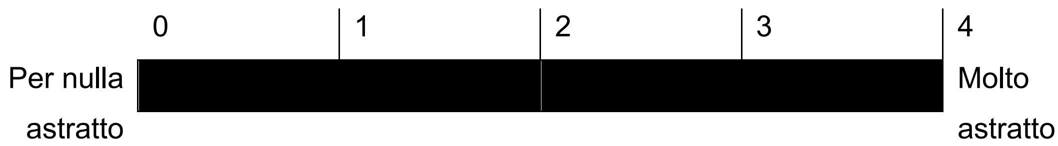
Per quanto riguarda gli esempi, nei tre articoli presi in considerazione si ha che, nel caso degli articoli *La crittografia da Sparta al bancomat* e *Non dire quattro se non ce* *l'hai nel calco*, prevalgono esempi reali, come i codici utilizzati per rendere sicure le password o gli stampi utilizzati per realizzare i numeri degli orologi che usano numeri romani. Nell'articolo dedicato a Mozart, come è facilmente inutibile, prevalgono esempi calati nel mondo dell'arte, in questo caso la musica.

Da quello che abbiamo detto quando abbiamo introdotto la griglia, a esempi reali corrisponde un livello zero di astrazione, tanto più se come in questo caso gli esempi sono concreti e vicini al lettore. Agli esempi, invece, che ricadono in altre discipline artistiche corrisponde un livello due di astrazione. Pertanto, tenendo conto degli uni e degli altri esempi possiamo dire che il livello di astrazione, per questa categoria, è il livello uno.



Terza categoria: le metafore

Come per i numeri precedenti della rivista Archimede anche in questo caso negli articoli non sono presenti metafore e, pertanto, il livello di astrazione è il più alto.



4.5 Prisma, ottobre 2018

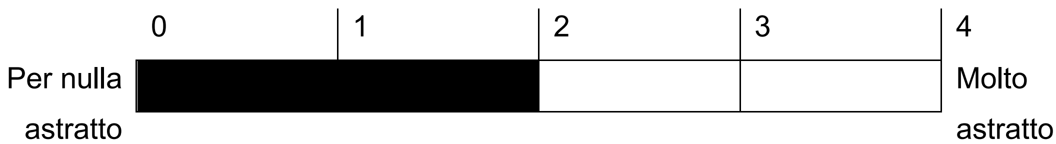
Leggendo gli articoli di Prisma si osserva subito una differenza con gli articoli presenti sulla rivista Archimede. Alcuni articoli, infatti, hanno come riferimento gli aspetti quotidiani della vita. Nel caso del numero di ottobre 2018, ad esempio, in un articolo si parla degli algoritmi che vengono utilizzati dai siti di incontri per determinare l'affinità tra due profili, mentre in un altro articolo si parla delle variabili che favoriscono il contagio e la diffusione di una malattia infettiva all'interno di una popolazione.

Come per i numeri di Archimede precedentemente considerati anche per i numeri di Prima è stato selezionato un gruppo ristretto di articoli scartando articoli di storia della matematica, interviste, se incentrate più sulla vita dell'intervistato che su argomenti specifici e reportage.

Gli articoli considerati per questo numero di Prisma sono *I matching amorosi* di Luca Perri, *L'immunità di gruppo spiegata* di Michele Bellone, *L'autocorrezione degli errori*[20] di Chris Budd © Plus Magazine, *Il primato dei numeri primi*[21] e *Infiniti trabocchetti* di Marco Casareto.

Prima categoria: i simboli

Per quanto riguarda l'uso dei simboli si osserva una presenza maggiore di formule matematiche che, come abbiamo avuto modo di dire, nella nostra classificazione sono considerati delle icone. Nell'articolo *L'autocorrezione degli errori* sono inoltre presenti stringhe di 0 ed 1, le uniche cifre presenti nel codice binario. Queste stringhe possono, a loro volta, essere considerate delle icone. Pertanto, il livello di astrazione per questa categoria è quello relative alle icone, ovvero il livello due.



Seconda categoria: gli esempi

Per quanto riguarda gli esempi, si osserva una differenza tra gli articoli che considerano applicazioni della matematica e quelli che, invece, affrontano tematiche presenti nella quotidianità come i siti di incontri online o la diffusione di un'epidemia, rispetto agli altri articoli.

In particolare, nel caso dell'articolo *L'immunità di gruppo spiegata*, l'autore fa l'esempio del contagio del morbillo per valutare la percentuale di popolazione che occorrerebbe vaccinare per fare in modo che la malattia non si diffonda.

---

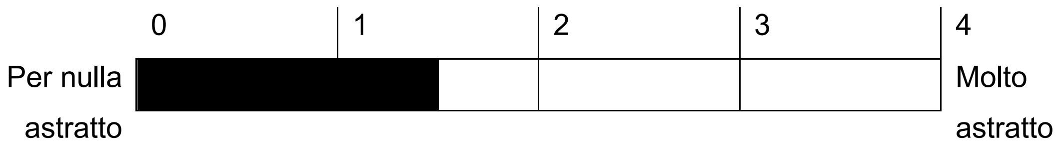
[20] Il titolo dell'articolo qui riportato fa riferimento all'indice, quantunque all'interno delle pagine il titolo sia *Messaggi a prova di errore*.

[21] Come per la nota precedente anche in questo caso il titolo dell'articolo qui riportato fa riferimento all'indice, quantunque all'interno delle pagine il titolo sia *Il primeggiare dei numeri primi*.

Nel caso invece degli articoli che si soffermano su argomenti specifici come *Infiniti trabocchetti* sulle serie numeriche, gli esempi utilizzati dall'autore sono esempi numerici e quindi interni alla matematica. A pagina 45, ad esempio, si legge:

> *Consideriamo per esempio la serie:*
>
> $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$
>
> *Questa serie è convergente, e si può dimostrare che la sua somma è uguale al logaritmo naturale di 2 (circa 0,693…).* [Casareto 1]

Per riuscire a tener conto sia degli esempi concreti più vicini al lettore, al quale abbiamo supposto di assegnare livello di astrazione zero, sia degli esempi matematici ai quali abbiamo invece supposto di assegnare livello di astrazione tre, possiamo prendere il valore equidistante dai due casi e riempire la barra tra il livello uno e il livello due.

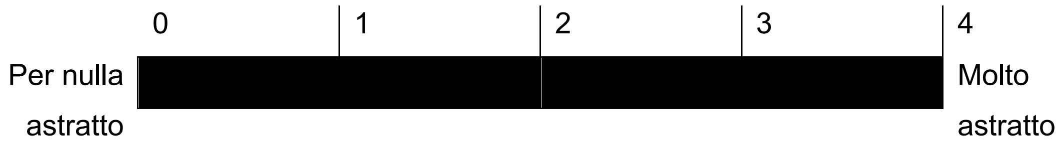


Terza categoria: le metafore

Come nel caso degli articoli presenti sui numeri della rivista Archimede, anche per quanto riguarda gli articoli dei numeri di Prisma considerati si è osservato una quasi totale assenza di metafore. L'unica metafora è quella presente nell'articolo Il primato dei numeri primi in cui l'autore paragona i numeri primi agli atomi della chimica in quanto «*si può infatti dimostrare che ogni altro numero naturale può essere scritto come prodotto di numeri primi*[22]».

[22] M. Casareto., *Il primato dei numeri primi*, Prisma, ottobre 2018

Dato l’esiguo numero di metafore possiamo assegnare per questa categoria il livello di astrazione più alto.



4.6 Prisma, novembre 2018

Anche nel caso di questo numero di Prisma abbiamo considerato solo alcuni degli articoli presenti all’interno delle pagine della rivista, escludendo i reportage come quello sulla tigre della Tasmania, articoli di carattere storico come quello che ripercorre le dispute matematiche tra Niccolò Tartaglia e Gerolamo Cardano e l’articolo sulla fisica del tennis. Nell’ultimo caso l’esclusione è dovuta al fatto che il nostro interesse era quello di analizzare solo testi dedicati ad argomenti matematici. Gli articoli che sono stati, quindi, presi in considerazione sono stati *Tutti i numeri dell’estinzione* di Elisa Buson sul modello preda-predatore sviluppato dal matematico Vito Volterra, *È più facile trovare gli alieni o l’anima gemella?* di Luca Perri, *Molto grande, incredibilmente piccolo* di Glianluca Forte e *La naturale bellezza della matematica* di Margaret Wertheim © AEON.

Prima categoria: i simboli

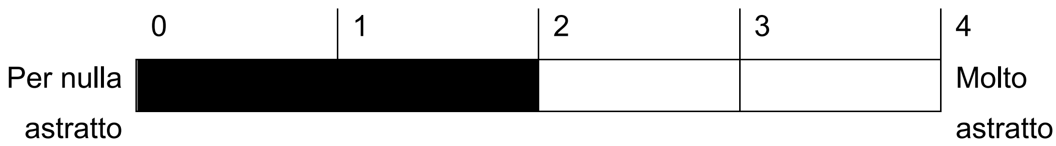
Tutti gli articoli contengono simboli, tranne l’articolo *La naturale bellezza della matematica* nel quale il simbolismo è del tutto assente per una scelta dell’autrice che, nell’articolo, ribadisce che «*La matematica non va insegnata come cosa astratta, ma appresa quale attività pratica, come imparare a suonare uno strumento*[23]» e che quindi «Non occorre essere esperti di simboli per apprezzare questo terreno[24]».

Nell’articolo di Luca Perri *È più facile trovare gli alieni o l’anima gemella?* è presente una sola formula, l’equazione di Drake, e i simboli in essa presenti sono successivamente spiegati dall’autore uno per uno.

[23] M. Wertheim, *La naturale bellezza della matematica*, Prisma, novembre 2018
[24] Ibidem

Nell’articolo di Elisa Buson *Tutti i numeri dell’estinzione* sono riportate le equazioni che Volterra ricavò per descrivere il tasso di crescita di una certa popolazione, mentre nell’articolo *Molto grande, incredibilmente piccolo* a formule matematiche vengono alternate, dall’autore, delle frecce, da considerarsi come indici, che indicano il salto dalla potenza di un numero alla successiva.

Tenendo conto di questa eterogeneità possiamo dire che il livello di astrazione associato a questa categoria non è né troppo astratto né per nulla astratto. Ci sembra quindi un’indicazione utile rappresentare la barra riempita fino a metà della sua lunghezza.



Seconda categoria: gli esempi

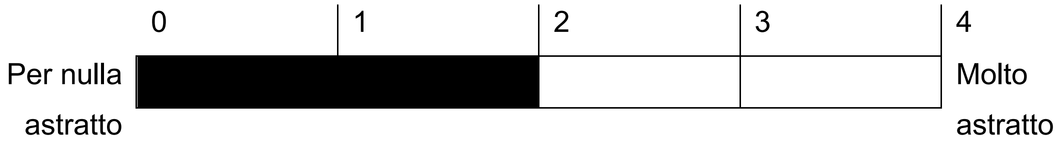
Gli esempi presenti negli articoli analizzati sono per la maggior parte esempi matematici o esempi calati nella realtà ma distanti dalla quotidianità del lettore. Soprattutto nell’articolo *Molto grande, incredibilmente piccolo* prevalgono esempi numerici utilizzati dall’autore per rendere in maniera pratica la definizione di potenza in matematica.

Nell’articolo *La naturale bellezza della matematica* è, invece, possibile individuare esempi concreti ma non molto vicini alla realtà del lettore come il caso dell’olografia per spiegare in che modo opera la trasformata di Fourier. Nello stesso articolo l’autrice presenta un esempio appartenente al mondo dell’arte che si può leggere a pagina 66.

> *Prima che i geometri europei riuscissero a capire che ci sono solo 17 tassellazioni matematicamente distinti del piano (ossia modi diversi di riempire un’area con un motivo regolare a tasselli), i mosaicisti medievali le conoscevano già tutte.* [Wertheim 1]

Per concludere, anche negli articoli *È più facile trovare gli alieni o l’anima gemella?* e *Tutti i numeri dell’estinzione* sono presenti esempi concreti ma non vicini al lettore.

Dal momento che prevalgono esempi concreti di livello uno ed esempi matematici di livello tre possiamo dire che una rappresentazione indicativa del livello di astrazione per questa categoria è quella per cui la barra è riempita fino alla tacca centrale.

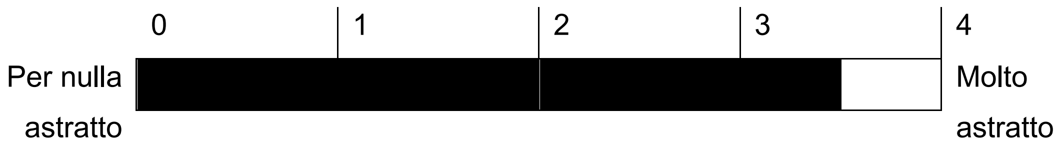


Terza categoria: le metafore

Come per gli articoli della rivista di Prisma precedentemente considerati anche in questo caso le metafore presenti rappresentano un numero esiguo, Le uniche metafore si hanno nell’articolo sul modello preda-predatore di Volterra in cui l’autrice paragona il segno meno davanti a un termine dell’equazione che descrive come evolve il tasso crescita di una popolazione alla “morte”.

Nell’articolo *La naturale bellezza della matematica*, invece, è presente una metafora che utilizza concetti matematici e confronta, mettendone in evidenza le differenze, la superficie di una sfera con quella di un piano iperbolico.

Come si osserva, anche in questo caso, la scelta di utilizzare metafore non è stata presa molto in considerazione dagli autori degli articoli. Dovendo tener conto, tuttavia, delle metafore presenti e appena descritte si può riempire indicativamente la barra fino al livello equidistante tra il terzo e il quarto livello.



4.7 Prisma, Dicembre 2018

Questo numero di Prisma, a differenza degli altri due analizzati precedentemente, ha più articoli dedicati ad altre scienze piuttosto che alla matematica. Gli articoli presi in considerazione sono i seguenti: *Big data versus teorema* di Marco Casareto, *Quando non si può, non si può!* di Gianluca Forte e *(In)finiti infinitesimi nei granelli di sale* di Sandra Lucente.

Prima categoria: i simboli

I tre articoli considerati hanno un basso livello di astrazione per quello che riguarda questa categoria. Sono assenti simboli, indici e icone, mentre solamente nell'articolo *Quando non si può, non si può!* sono presenti alcune rappresentazioni che hanno il compito di permettere al lettore di visualizzare gli esempi presi in considerazione dall'autore. È il caso della curva disegnata in modo che il suo profilo assomigli a quello di un topo (figura 13).

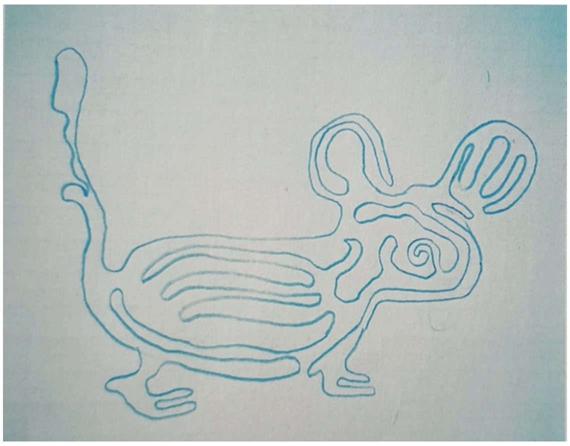
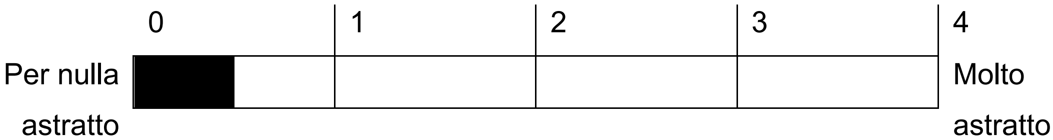


Figura 13. Immagine tratta dal numero di dicembre 2018 della rivista Prisma.

Da quello che abbiamo detto si evince, pertanto, che il livello di astrazione che meglio rende il livello di astrazione per questa categoria è un valore compreso tra zero, assenza di simboli e uno.

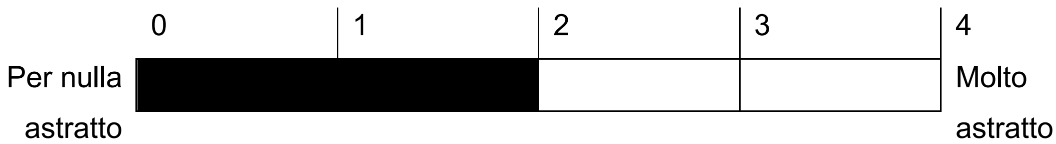


Seconda categoria: gli esempi

Negli articoli *Big data versus teorema* e *(In)finiti infinitesimi nei granelli di sale* gli autori propongono esempi concreti sebbene, nel caso del primo dei due articoli citati gli esempi siano più distanti dalla realtà del lettore. Si tratta, infatti, di esempi che hanno a che fare con il metodo scientifico utilizzato dagli scienziati quando svolgono le proprie ricerche o con i sistemi di riconoscimento vocale e visivo di aziende high-tech. Nell'altro articolo, l'esempio è quello dei granelli di sabbia, un esempio che, come riferisce l’autrice, era già stato usato da Archimede per spiegare il metodo di esaustione dal lui proposto.

Nell’articolo *Quando non si può, non si può!*, invece, gli esempi utilizzati sono esempi matematici dal momento che le figure prese in considerazioni sono solo curve geometriche, quantunque l’autore cerchi di renderle più famigliari al lettore riferendosi ad esse con immagini che richiamano oggetti più concreti, come un topo, uno stagno o una ciambella.

Il livello di astrazione, per questo categoria, è distribuito tra un livello zero, un livello uno e un livello tre. Si tratta, pertanto, mediamente di un livello di astrazione né troppo alto né troppo basso che, indicativamente, possiamo rappresentare riempiendo la barra fino a metà della sua lunghezza.



Terza categoria: le metafore

L’unico articolo, tra quelli considerati, in cui sono presenti delle metafore, è l’articolo *Quando non si può, non si può!*. In particolare, ci riferiamo alla scelta, da parte dell’autore, di riferirsi alle curve matematiche rappresentate utilizzando immagini vicini al lettore. È il caso, ad esempio, della figura seguente.

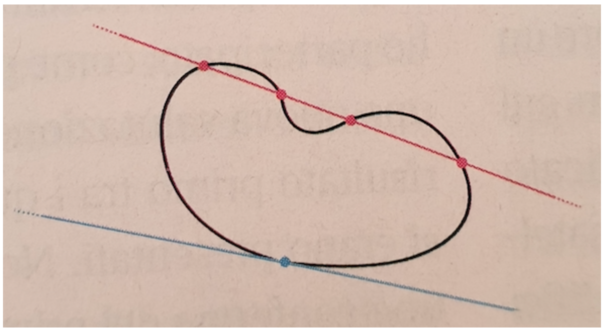
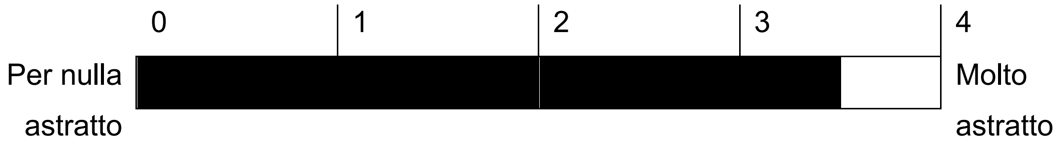


Figura 14. Immagine tratta dal numero di dicembre 2018 della rivista Prisma.

In questo caso l’autore costruisce un’analogia tra la curva rappresentata e il perimetro di uno stagno.

Dall’analisi svolta si può dire che negli articoli considerati non c’è un largo impiego di metafore e, pertanto, possiamo associare a questa categoria un livello comunque alto di astrazione.



Conclusioni

Dall'analisi svolta in questo elaborato di tesi possiamo trarre alcune conclusioni sulle scelte svolte dagli autori nel caso di libri e riviste.

Per quanto riguarda i libri la prima cosa che si osserva è che, in tutti e quattro i testi presi in considerazione, la trattazione è più vicina ai valori alti di astrazione che ai valori bassi. Questa parziale omogeneità dipende, in parte, dal fatto che il campione scelto è composto da opere appartenenti a una stessa serie di libri e devono, quindi, rispettare alcuni criteri stabiliti dalle scelte editoriali della casa editrice. Da questa considerazione non si può far discendere un ragionamento univoco per le opere divulgative di matematica presenti nel panorama italiano. Tuttavia, si può constatare come tra i libri di matematica, che comunque si rivolgono a un pubblico generico, vi siano opere con un livello di astrazione abbastanza alto, che non possono essere usufruiti da tutti nello stesso modo.

Entrando più nello specifico si vede che il testo *Infinito* di Bottazzini è quello con un livello di astrazione simbolica più basso rispetto agli altri, discorso che vale anche per gli esempi e per le metafore, anche se in questo caso il livello è lo stesso del saggio *Matematica come narrazione* di Gabriele Lolli. Il risultato ottenuto nel caso del libro di Bottazzini rispecchia l'approccio seguito dall'autore, più storico rispetto agli altri testi presi in esame, suggerendo che, in un saggio che si concentra sugli aspetti storici, contenuti con un alto livello di astrazione siano meno presenti.

Per quanto riguarda, invece, le riviste si osserva che per alcune categorie la trattazione è più vicina a livelli bassi di astrazione. È il caso della categoria simbolica e della categoria degli esempi. Per quanto riguarda invece le metafore, queste sono poco utilizzate, sia nel caso di Archimede, sia nel caso di Prisma. Quest'ultimo risultato conduce alla riflessione che la scelta di utilizzare metafore potrebbe essere privilegiata in testi più lunghi, piuttosto che in testi brevi come, ad esempio, gli articoli.

Tra le riviste, inoltre, si riscontra una differenza tra Archimede e Prisma. La prima è più rigorosa in alcune trattazioni e risulta più lontana dalla quotidianità dei lettori.

L’analisi del campione è stata svolta utilizzando una griglia la cui realizzazione fa parte del lavoro originale di questa tesi. La barra sulla quale è stato riportato il livello di astrazione di un’opera è anch’essa un risultato originale di questo elaborato ed è stato ispirato dal modello sviluppato da Perry Coleman nell’articolo *A New Way to Look at Literature: A Visual Model for Analyzing Fiction and Non Fiction Texts* dove l’autrice riporta sulle barre il livello corrispondente alla presenza di materiale inventato in un testo.

Per inferire dall’analisi maggiori informazioni, sarebbe, tuttavia, necessario estendere il campione, prendendo in considerazioni anche oltre opere divulgative del panorama italiano e, soprattutto, andrebbe indagata l’effettiva efficacia di un testo, sottoponendo a un campione di lettori dei questionari di valutazione. In questo modo si potrebbe dedurre se le ipotesi di una maggiore efficacia per quei testi che privilegiano livelli di astrazione più vicini al mondo reale del pubblico abbiano un effettivo riscontro nella percezione di un generico lettore.

Riferimenti bibliografici

[Abbott. E. A.], Flatlandia, Adelphi, 2007

[Andreatta M.], *La forma delle cose*, Il Mulino, 2019

Archimede, gennaio – marzo 2018

Archimede, aprile – giugno 2018

Archimede, luglio – settembre 2018

Archimede, ottobre – dicembre 2018

[Bottazzini U.], *Infinito*, Il Mulino, 2018

[Capozucca A.], *Comunicare la matematica*, AL1C3&B08, novembre 2018

[Catastini L., Ghione F.], *Geometrie senza limiti*, Il Mulino, 2018

[Eco U.], *Lector in fabula*, Bompiani, 2016

Enciclopedia della matematica, Garzanti, 2013

[Eulero], *Lettere a una principessa tedesca Volume primo*, Bollati Boringhieri, 2007

[Gouthier D.], *Matematica. Saperne un minimo*, Archimede n. 4, 2017

[Gouthier D.], *Scrivere di scienza*, Codice Edizioni, 2019

[Gouthier D., Ioli E.], *Le parole di Einstein*, Edizioni Dedalo, 2006

[Gouthier D., Pitrelli N.], *Linguaggio, simboli e matematica*, La stella nova, 2015

[Gouthier D., Salvador M.], *Modo simbolico, mondi possibili e matematica*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 2006

Grande Dizionario Enciclopedico, Utet, 1994

[Greco P.], *What type of Science Communication best suits emerging countries?*, Journal of Science Communication, settembre 2005

https://it.wikipedia.org/wiki/Astrazione

La Piccola Treccani, 1995

[Lolli G.], *Matematica come narrazione*, Il Mulino, 2018

[Mazur J.], *Storia dei simboli matematici*, il Saggiatore, 2015

[Peirce C. S.], *Opere*, Bompiani, 2011

Prisma, ottobre 2018

Prisma, novembre 2018

Prisma, dicembre 2018

[Sbaragli S.], *Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica*, I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica., 2012

[Stewart I.], *Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo*, Einaudi, 2018