Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Vidossich

Una dimostrazione di un teorema di G. Aquaro.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.3, p. 400–401.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_400_0>

Una dimostrazione di un teorema di G. Aquaro

Giovanni Vidossich (Avenza)

Sunto. - *È nell'introduzione.*

In questa nota si espone una semplice dimostrazione della parte più complessa di [1, Prop. 1], usando [2, § 4. Prop. 1] e un noto teorema sugli «embeddings». In questa dimostrazione non si fa alcun uso di tecniche estranee a [3].

Convenzioni: Si useranno le notazioni e la terminologia di [3]. Si denoterà con

$\mathfrak{U}(\tau)$, per ogni topologia τ su X, l'insieme di tutte le uniformità su X compatibili con τ.

$\mathrm{Ud}(\tau)$, per ogni topologia uniformizzabile τ, il cardinale $\bigwedge_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{U}(\tau)} \mathrm{Rk}(\mathfrak{w})$, che può essere chiamato «grado di uniformizzabilità di τ».

Teorema ([1, Prop. 1]). – *Per ogni cardinale infinito k e ogni spazio topologico (X, τ) le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:*

(1) *τ è uniformizzabile e* $\mathrm{Bd}(\tau) \leq k$.

(2) *esiste una base completamente regolare $\mathfrak{B}$ di τ tale che* $|\mathfrak{B}| \leq k$.

(3) *esiste $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}(\tau)$ precompatta tale che* $\mathrm{Rk}(\mathfrak{w}) \leq k$.

(4) $\mathrm{Sd}(\tau) \leq k$ *e* $\mathrm{Ud}(\tau) \leq k$.

Prova. – Proveremo le implicazioni $(1) \longrightarrow (3) \longrightarrow (4) \longrightarrow (1)$ e $(3) \longrightarrow (2) \longrightarrow (1)$.

$(1) \longrightarrow (3)$: Per [3, 21.11], $\rho = \{(x, y) \in X^2 \mid \tau x = \tau y\}$ è una relazione d'equivalenza su X tale che $(X, \tau)/\rho$ è completamente regolare e, detta π la proiezione canonica di (X, τ) su $(X, \tau)/\rho$, $\tau = \pi(\tau_\pi)$. Per [3, 28.3], c'è un omeomorfismo φ di $(X, \tau)/\rho$ su un sottospazio S del k_0-cubo su $[0, 1]$, essendo $k_0 = \mathrm{Bd}(\tau_\pi)$. Sia I un insieme di cardinalità k_0 e, per ogni $i \in I$, $\mathfrak{w}_i$ una copia dell'uniformità di $[0, 1]$. Il k_0-cubo $[0, 1]^I$ è uniformizzabile e una uniformità compatibile con la sua topologia è $\mathfrak{w} = \theta \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{w}_i$, essendo

$$\theta : ([0, 1])^I \longrightarrow ([0, 1]^I)^2$$

definità così:

$$(x_i, y_i)_{i\in I} \longrightarrow ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}).$$

In virtù della definizione di filtro prodotto e delle proprietà dei cardinali infiniti, da $\mathrm{Rk}(\mathfrak{w}_i) \leq \aleph_0$ e $k_0 \leq k$ segue ovviamente $\mathrm{Rk}(\mathfrak{w}) \leq k$ Infine è evidente che $\mathrm{Tr}_{S\times S}(\mathfrak{w})$ è precompatta. Pertanto $_{(\varphi\circ\pi)}\mathrm{Tr}_{S\times S}(\mathfrak{w})$ è precompatta, è compatibile con τ (perchè $\tau = {}_{\pi}(\tau_\pi)$ e φ è un omeomorfismo) e $\mathrm{Rk}({}_{(\varphi\circ\pi)}\mathrm{Tr}_{S\times S}(\mathfrak{w})) \leq k$.

(3) $\longrightarrow$ (4) $\longrightarrow$ (1): Come in [1].

(2) $\longrightarrow$ (1): Evidente (tenuto conto di [1, Osservazione 1]).

(3) $\longrightarrow$ (2): Per [2, § 4, Prop. 1], c'è una base $\mathfrak{B} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{B}_i$ di τ tale che $|I| \leq k$ e $\mathfrak{B}_i$ è localmente finita. Per (3) $\longrightarrow$ (4), esiste $A \subseteq X$ tale che $|A| \leq k$ e A è denso in X. Pertanto

$$\mathfrak{B}_i = \bigcup_{a\in A} \{B \in \mathfrak{B}_i \mid B \ni a\},$$

il che implica (siccome $\mathfrak{B}_i$ è localmente, dunque puntualmente, finita)

$$|\mathfrak{B}_i| \leq \sum_{a\in A} |\{B \in \mathfrak{B}_i \mid B \ni a\}| \leq k,$$

da cui:

$$|\mathfrak{B}| \leq \sum_{i\in I} |\mathfrak{B}_i| \leq k. \quad \square$$

REFERENZE

[1] G. AQUARO, *Relazioni tra cardinalità di basi e di strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, «Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli» 27 (1960), 557-562.

[2] — —, *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, «Ann. Mat. Pura ed Appl.» 47 (1959), 319-390.

[3] H. J KOWALSKY, *Topological Spaces*, «Academic Press», New York, 1964.

Pervenuto alla Segreteria dell' U. M. I.
il 19 ottobre 1965