

SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI

TESI DI MASTER

I NEUTRINI MASSIVI E IL PROBLEMA DELLA MASSA MANCANTE

Settore di Astrofisica

Relatore: Prof. G. DE ZOTTI

Studente: Riccardo VALDARNINI

Anno Accademico 1981-82

INTRODUZIONE

Uno dei problemi più importanti in Astrofisica è il problema della massa mancante, o più propriamente, massa oscura.

La prima evidenza sperimentale la si ebbe con Zwicky (1933).

Applicando il teorema del Viriale all'ammasso della Virgo

Zwicky trovò che la massa totale del sistema eccedeva di alcune centinaia la somma delle singole masse galattiche.

Da allora vi è stata una crescente conferma sperimentale dell'esistenza di una massa oscura su tutte le scale (Faber e

Gallagher 1979, FG): dalle galassie a spirale fino agli ammassi, super-ammassi.

Per le galassie a spirale la curva di rotazione è piatta molto al di là del raggio della materia visibile.

Un andamento del genere lo si può spiegare solo in termini di un alone di massa oscura in cui la galassia è immersa.

Definendo un rapporto M/L , uguale a uno in unità solari, su grande scala i dati attuali suggeriscono $M/L \simeq 300h$

($h = H_0 / 50 \text{ Kmsec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, H_0 è la costante di Hubble), un valore molto più grande che del valore dedotto per la parte visi-

bile delle singole galassie.

Nel primo capitolo saranno discusse l'evidenze sperimentali della massa oscura e le diverse stime del parametro di densità Ω : metodi diversi tra loro conducono a $\Omega \approx 0.1 - 0.5$.

Limiti indipendenti, anche se indiretti, su Ω provengono dalle stime dell'età dell'Universo (vedi cap.II).

La natura della massa oscura è ancora sconosciuta. Per stabilire se essa può essere spiegata in termini barionici (pianeti, nane nere, resti di SN, etc.) è fondamentale stimare il contributo nucleonico ad Ω . Questo problema è affrontato nel cap.III . La stima per Ω_N è fatta indirettamente, attraverso le abbondanze attuali di elio e deuterio e l'uso della teoria cosmologica della nucleosintesi. L'indicazione che si ottiene, anche se con varie incertezze, è che $\Omega_N < \Omega$.

Recenti evidenze sperimentali, che i neutrini potrebbero avere una massa a riposo dell'ordine delle decine di eV (Lyubimov 1980, Reines 1980), propongono queste particelle come ovvie candidate per spiegare la massa oscura.

Le implicazioni cosmologiche di una $m_\nu \neq 0$ sono discusse

nei capitoli IV e V, con riferimento al problema della formazione di galassie e degli aloni galattici.

La nostra analisi mette in rilievo come la presenza di una forte componente oscura anche su scale galattiche, potrebbe implicare valori di m_y in contrasto con i limiti che vengono dalle stime di Ω e dall'età dell'Universo.

Questo punto e le possibili soluzioni sono discusse nelle conclusioni.

I. IL RAPPORTO MASSA-LUMINOSITA'

§1 - Galassie a spirale

Le galassie a spirale sono particolarmente importanti in una discussione sul problema della massa mancante in quanto per questi sistemi l'evidenza sperimentale dell'esistenza di una massa oscura è molto forte. Per il momento questi oggetti definiscono la scala minima cui la massa oscura è dominante.

La massa delle spirali è determinata attraverso la curva di rotazione, che dà la velocità di rotazione $V(R)$ in funzione della distanza R dal centro.

Per molti anni è stata dedotta misurando nell'ottico la velocità delle regioni HII. Per questo motivo le misure erano limitate alle regioni otticamente brillanti. Per una galassia a spirale la brillantezza superficiale, a distanza R dal centro, è generalmente espressa dalla legge di Freeman (1970):

$$(1.1) \quad i = i_0 e^{-\alpha R}$$

Freeman trova che mentre α^{-1} varia da galassia a galassia (3-5 Kpc) i_0 è praticamente costante

$$(1.2) \quad i_0 = 21.65 \text{ B mag (arc-sec)}^{-2}$$

α definisce un raggio fisico, al quale la brillantezza cala di 1/e del valore centrale i_0 .

Purtroppo α^{-1} è conosciuto solo per poche galassie. Perciò è quasi sempre necessario riferirsi a un raggio fotometrico.

Un raggio frequentemente adottato è quello di Holmberg R_{H_0} , per il quale la brillantezza superficiale è di $26.5 \text{ B mag (arc-sec)}^{-2}$.

Per galassie non troppo lontane $R_{H_0} \approx \alpha^{-1}$, quindi oltre R_{H_0} la brillantezza superficiale cala rapidamente.

Se facciamo l'ipotesi che la distribuzione di luce sia una adeguata indicazione di quella della massa, a grandi raggi (oltre R_{H_0}) ci si aspetterebbe per la $V(R)$ un andamento Kepleriano, $V(R) \sim R^{-1/2}$.

Roberts (1975) ha trovato che l'estensione media delle curve di rotazione nell'ottico è dell'ordine di $0.3 R_{H_0}$.

Tipicamente queste curve mostrano ^{posteriore del centro} un rapido incremento della velocità di rotazione in prossimità del centro, quindi un appiattimento. A raggi più grandi le misure diventano difficili perchè la brillantezza superficiale della galassia

diventa troppo bassa.

Una parametrizzazione frequentemente adottata era quella di Brandt (1960)

$$(1.3) \quad V_{ROT}(R) = V_{MAX} \frac{R/R_{MAX}}{\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{R}{R_{MAX}} \right)^n \right]^{3/2n}}$$

V_{MAX} è il massimo della velocità di rotazione, corrispondente ad un R_{MAX} , n è determinato adattando la (1.3) fino all'ultimo punto misurato. Assumendo che la velocità oltre questo punto sia data dal modello di Brandt, la massa totale

$$\text{è } M_T = \left(\frac{3}{2} \right)^{3/n} V_{MAX}^2 R_{MAX} / G .$$

Successivamente si è scoperta l'esistenza di regioni HI, molto al di là delle regioni visibili; ciò ha permesso l'uso della riga a 21 cm per misurare la velocità di rotazione a grandi distanze dal centro.

Le osservazioni radio a 21 cm hanno mostrato come le curve di rotazione rimangano piatte molto al di là del raggio di Holmberg (fino a 50 Kpc in alcuni casi), implicando una massa molto maggiore di quella data dal modello di Brandt.

Questa evidenza sperimentale è andata crescendo negli ultimi anni (FG); attualmente vi sono una cinquantina di galassie

a spirale per le quali la curva di rotazione è misurata a grandi distanze.

M/L

Per stimare M ed M/L non ci interessano le regioni interne, il cui contributo alla massa totale è trascurabile.

Una stima di M_{TOT} implica necessariamente una ipotesi sulla estensione della curva di rotazione, al di là della quale essa avrebbe un andamento Kepleriano.

Le misure attuali non hanno ancora raggiunto questa regione: le curve di rotazione osservate continuano ad essere piatte molto al di là della regione visibile. Di conseguenza M ed M/L si devono riferire a fin dove arriva la curva di rotazione. A scopo indicativo un raggio frequentemente adottato è quello di Holmberg, comparabile in grandezza all'estensione della curva di rotazione nell'ottico.

L'ipotesi più semplice è quella di simmetria sferica per la massa oscura, in tal caso

$$(1.4) \quad \frac{GM(<R)}{R^2} = \frac{V_{circ}^2}{R}$$

$$V_{circ} \approx const \Rightarrow \rho \sim R^{-2} \quad \text{e per la massa integrata}$$

$$(1.5) \quad M = \int_0^D 4\pi r^2 \rho dr \sim D$$

La massa non luminosa cresce con l'estensione della piatezza della curva di rotazione.

Dal campione di FG, Peebles (1979 a) ha selezionato 39 galassie a spirale con $L_B > 10^{10} h^{-2} L_\odot$, i valori medi di questo campione sono

$$(1.6a) \quad \langle L \rangle = 5.6 \cdot 10^{10} (1 \pm 0.79) h^{-2} L_\odot (B)$$

$$(1.6b) \quad \langle M(r_{H_0}) \rangle = 2.8 \cdot 10^{11} (1 \pm 0.6) h^{-1} M_\odot$$

$$(1.6c) \quad \langle M/L \rangle = 5h (1 \pm 0.45) \left[\frac{M_\odot}{L_\odot(B)} \right]$$

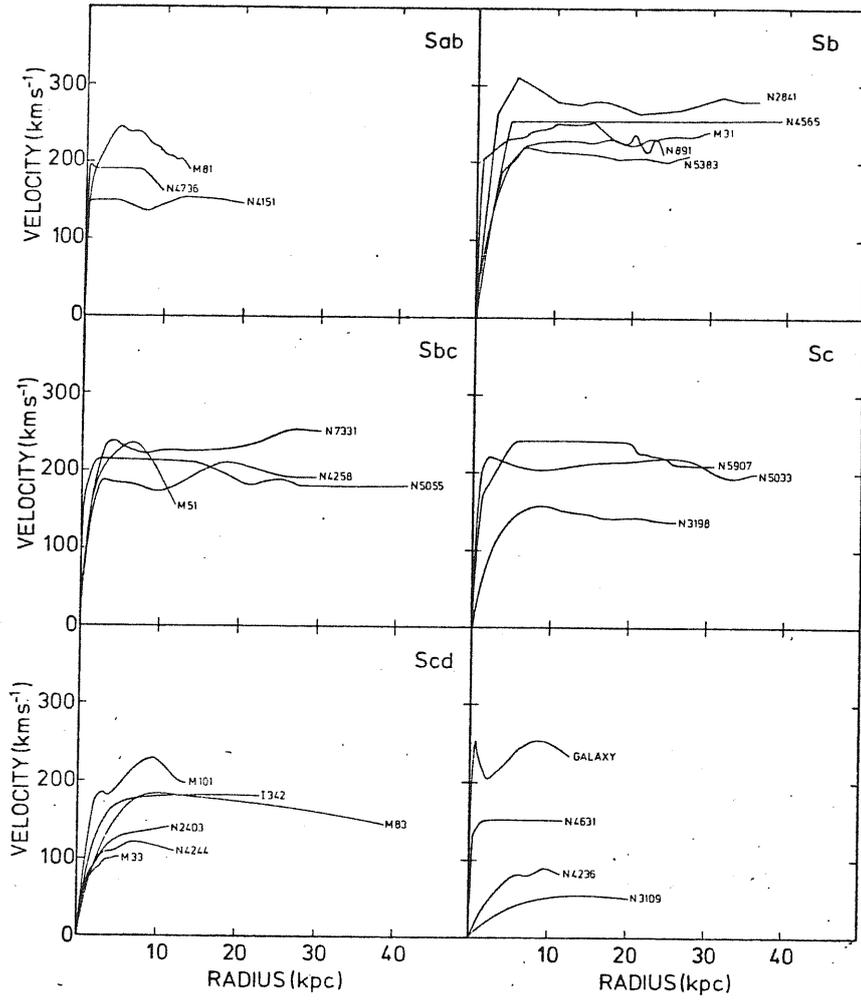
$$(1.6d) \quad \langle R_H \rangle = 26 h^{-1} \text{Kpc}$$

Il rapporto M/L non differisce di molto da quello nell'intorno solare ($\sim 1-3$) cosicchè la massa oscura non è ancora dominante entro R_{H_0} .

Le misure nel radio indicano che le curve di rotazione si estendono molto al di là di R_{H_0} (Bosma 1981, Rubin et al. 1978, Burnstein et al. 1982), fino a 50-80 Kpc. In questi casi M/L può arrivare fino a $(10-20) (M/L)_\odot$.

La Fig.1 mostra l'andamento della curva di rotazione per alcune galassie a spirale, in Tab.1 sono riportati i rapporti M/L per vari tipi di galassie (FG).

FIG. 1



TAB. 1

Type	M/L_B	M/L_V^b	M/L_K^c	M^*/L_B^d	Model M^*/L_B^e
S0 ⁻	10: ^f	7.6:	1.4:	10:	5.3
S0 ⁺ -Sa	6.2 ± 1.1	5.4	1.1	6.1	3.5
Sab-bc	6.5 ± 0.5	6.1	1.2	6.3	2.8
Sbc-Sc	4.7 ± 0.4	5.0	1.1	4.4	1.6
Scd-Sd	3.9 ± 0.6	4.5	1.4	3.5	0.80
Sdm-Irr	1.7 ± 0.6	2.0	0.9	0.9	0.80

§2 - Galassie E ed SO

Nelle ellittiche la rotazione sembra essere trascurabile.

Lo studio della dinamica si deve quindi basare sulla misura della dispersione di velocità σ , molto più difficile da determinare.

Per ottenere la massa ed il rapporto M/L del sistema applichiamo il teorema del Viriale

$$(2.1) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \Omega$$

I è il momento d'inerzia, T l'energia cinetica e Ω quella potenziale.

Assumiamo che il sistema sia in equilibrio e che la rotazione sia trascurabile. Nell'ipotesi di simmetria sferica

$$(2.2) \quad T = \frac{3}{2} \int_0^R \sigma^2(r) dM(r)$$

$$(2.3) \quad \Omega = -G \int_0^R \frac{M(r)}{r} dM(r)$$

dove σ è la dispersione di velocità lungo la linea di vista.

Sfortunatamente, tranne poche eccezioni, σ è noto solo nelle regioni centrali. In pratica, allora, per stimare T si fa l'ipotesi che σ sia costante attraverso tutta la galassia e che il suo valore sia quello osservato nel nucleo.

Questa assunzione non è sperimentalmente verificata (a parte alcuni casi cui accenneremo dopo).

Riguardo al calcolo dell'energia potenziale si assume che massa e luce siano distribuite in maniera simile.

Una espressione frequentemente adottata per la $i(R)$ è la legge di De Vaucoulers (1948)

$$(2.4) \quad \log \frac{i}{i_e} = -3.33 \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right]$$

R_e è un raggio isofotale per cui la brillantezza superficiale è la metà del valore centrale. Dalla (2.4) si ottiene

$$(2.5) \quad \Omega = -0.33 GM^2 / R_e$$

Vi sono alcune critiche che riguardano questo approccio al problema di determinare M/L per una galassia ellittica.

La legge di De Vaucoulers non sembra essere confermata per regioni esterne del sistema (Kormendy 1977, Strom e Strom 1978).

Sperimentalmente R_e è difficile da determinare: in alcune cd non sembra esserci convergenza ad un valore finito per la luce (Oemler 1976).

Infine se la massa oscura per le ellittiche si estende molto al di là di R_e , l'uso della legge di De Vaucoulers non ha alcun

significato nel determinare Ω .

Data quindi la cattiva conoscenza che si ha delle regioni esterne per le ellittiche un metodo frequentemente usato oggi è quello di King (1972), che si riferisce solo alle regioni centrali del sistema, meglio conosciute.

Una buona rappresentazione dell'andamento della densità di luminosità nelle regioni centrali è

$$(2.6) \quad J(r) = J_0 \left(1 + r^2/a^2\right)^{-3/2}$$

La brillantezza superficiale è allora

$$(2.7) \quad i(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J(s) dz}{4\pi} = \frac{J_0}{2\pi} \frac{a}{1 + (r/a)^2} \quad s^2 = r^2 + z^2$$

Il raggio del nucleo a e J_0 possono essere determinati sperimentalmente.

Prendiamo una distribuzione gaussiana ed isotropa per le velocità centrali, con σ costante su tutto il nucleo. La funzione di distribuzione stellare è

$$(2.8) \quad f(v, r) = \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{v^2}{2} + \phi(r) \right) \right\}$$

con $\langle v^2 \rangle = 3\sigma^2$. Per la densità numerica si ha

$$(2.9) \quad n(r) = 4\pi \int_0^\infty f(v, r) v^2 dv = \\ = (2\pi)^{3/2} \sigma^{-3} e^{-\phi(r)/\sigma^2}$$

Dalla (2.6)

$$(2.10) \quad n(r) = (2\pi)^{3/2} \sigma^{-3} e^{-\phi(r)/\sigma^2} = \text{const} \times \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-3/2}$$

La condizione $\phi(0) = 0$ dà

$$(2.11) \quad \phi(r) = \frac{3}{2} \sigma^2 \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)$$

La $\rho(r)$ la si può determinare dall'equazione di Poisson

$$(2.12) \quad r^{-2} \partial_r r^{-2} \partial_r \phi(r) = -4\pi G \rho(r)$$

$$(2.13) \quad \rho(r) = \rho_0 \frac{(1 + r^2/3a^2)}{(1 + r^2/a^2)^2} \quad \rho_0 = \frac{9\sigma^{-2}}{4\pi G a^2}$$

Il rapporto M/L, al centro, è allora

$$(2.14) \quad \left(\frac{M}{L}\right)_0 = \frac{\rho_0}{j_0} = \frac{9\sigma^{-2}}{8\pi^2 G a i_0}$$

Valori tipici di $(M/L)_0$ sono attualmente (Faber e Jackson 1976, Schechter e Gunn 1979)

$$(2.15) \quad \left(\frac{M}{L}\right)_0 \sim (5-10) h \left[\frac{M_\odot}{L_\odot(B)} \right]$$

In Tav.2 sono riportati i rapporti M/L per alcune galassie di tipo E ed SO.

Vi sono alcuni casi in cui σ sembra essere effettivamente costante anche al di là del nucleo.

Schechter e Gunn (1979), su un campione di 12 ellittiche,

concludono che σ è costante fino a $r \sim 6 h^{-1} \text{Kpc}$. Su distanze

più grandi Faber et al. (1977), per una cD Abell 401,

trovano che σ non diminuisce in modo significativo per

TAB. 2

Core values:							
Object		M/L_B	Source				
Mean luminous E		8.5	Faber & Jackson 1976				
M31 bulge outside nucleus		8.5	Photometry from Light et al. 1974; $\sigma = 150$				
NGC 4473, inside 5 kpc		5.4	Young et al. 1978				
Other values:							
Object	Type	Distance (Mpc)	R^a (kpc)	R/R_{HO}	V_{tot}^b	M/L_B^c	Source
NGC 128	S0p	90.0	17.4	0.4	250	7.2	Bertola & Cappaccioli 1977
NGC 3115	S0 ⁻	9.5	4.6	0.3	350	12.3	Rubin et al. 1976
NGC 3636	RSA(rs)0 ⁺	21.1	11.3	1.0	233	8.8	Table 1
NGC 4278	E	14.4	16.8	1.9	195	19.8	Knapp et al. 1978
NGC 4324	SA(r)0 ⁺	23.0	9.0	1.0	163	5.5	Table 1
NGC 4762	SB(r)0 ⁰	23.0	7.8	0.3	210	5.1	Bertola & Cappaccioli 1978

^a Radial extent of observed rotation curve.

^b Assumed velocity of rotation, corrected when necessary for projection effects.

^c M/L_B within radius R , assuming mass spherically distributed.

TAB. 3

	M/L_B	Median r_p^a	Median Δv^b
Turner 1976a,b:		50 kpc	105 km s ⁻¹
$\epsilon = 0.00$	17 ± 4		
$\epsilon = 0.67$	20 ± 5		
$\epsilon = 0.74$	24 ± 7		
Small halo ^c	33 ± 10		
S. Peterson 1978:		110 kpc	125 km s ⁻¹
$\epsilon = 0$; all objects	32 ± 11		
$\epsilon = 0$; $r_p > 112$ kpc	37 ± 14		
Karachentsev:		27 kpc ^d	125 km s ^{-1e}
$\epsilon = 0$; $\eta = 0.295$	5.2 ± 2.3 ^d		
$\epsilon = 0$; $\eta = 0.261$	5.9 ± 2.7 ^f		

Table 4 Mass-to-light ratios of small groups

Source	Median M/L_B	No. groups
Turner & Gott 1976:		
All groups, unculted	70	39
Culled groups	30	48
Rood & Dickel 1978a:		
Turner-Gott groups, culled	40	29
Sandage-Tammann-de Vaucouleurs groups	140	63
Materne & Tammann 1974	~260	14
Tammann & Kraan 1978	~40 ^a	7
Tully & Fisher 1978	~40	9

^a Mean value.

$$r \sim 44 h^{-1} \text{Kpc} .$$

La conclusione è che, almeno per alcune ellittiche, vi è evidenza sperimentale per l'esistenza di massa oscura.

§3 - Sistemi binari e piccoli gruppi

Nel caso dei sistemi binari e dei piccoli gruppi l'evidenza sperimentale per l'esistenza di una massa oscura non è così probatoria come per le galassie a spirale. Accenneremo solamente al problema.

Per i sistemi binari la difficoltà principale sta nell'uso di un corretto approccio statistico al problema di determinare M ed M/L . M è determinato statisticamente attraverso una media sulla funzione di massa F , per un gran numero di sistemi. Dato che i sistemi binari di galassie sono selezionati sulla base della loro separazione proiettata, gli angoli delle orbite non sono più distribuiti casualmente, e il calcolo della media di F deve tener conto in modo appropriato della selezione osservativa.

A questo scopo sono state proposte varie tecniche (Turner 1976, Peterson 1978). In Tab.3 sono riportati i rapporti M/L_B per

alcuni sistemi binari.

Per i piccoli gruppi (Tab.4, Turner e Gott 1976, Rood e Dikel 1978) è difficile decidere quali siano i membri effettivi del gruppo, dato che la contaminazione dal fondo è molto maggiore che nel caso degli ammassi.

I cataloghi (De Vaucoulers 1975, Sandage e Tamman 1975) differiscono tra di loro nell'assegnazione dei membri di ogni gruppo e vi sono incertezze di un fattore 3-4 tra i vari M/L .

§4 - Ammassi

Il problema della massa mancante su grandi scale è stato notato per la prima volta da Zwicky (1933,1937). Applicando il teorema del viriale agli ammassi della Virgo e Coma Zwicky trovò che M/L erano in entrambi i casi di alcune centinaia, molto maggiore di quanto aspettato dalla somma delle singole masse galattiche.

Nel determinare l'energia cinetica i problemi principali sono: effettuare una media appropriata sulla dispersione spaziale di velocità v^2 , risalire a v^2 dalla dispersione proiettata σ^2 .

Chincarini e Rood (1977) hanno mostrato, nel caso di Abell 194, che diverse procedure, tutte giustificate, possano condurre a differenze di un fattore 3 nella stima della massa. La determinazione del fattore di proiezione delle velocità è affetta da un errore simile: nel caso di orbite circolari con distribuzione isotropa si avrebbe $v^2 \sim 3\sigma^2$, per orbite puramente radiali $v^2 \sim \sigma^2$.

Nel calcolare l'energia potenziale si assume che la distribuzione delle galassie rifletta la distribuzione della massa. Introduciamo un raggio virializzato, tale che

$$(4.1) \quad \Omega = -GM^2/R_{VT}$$

Schwarzschild (1954) ha mostrato come R_{VT} possa essere misurato direttamente.

Sia $S(\delta) d\delta$ il numero di galassie che appaiono su una striscia di larghezza $d\delta$, ad una distanza δ dal centro dell'ammasso,

$$(4.2) \quad S(\delta) = \int_0^{r(R)} n(r) 2\pi r dr = \int_{\delta}^R 2\pi r n(r) dr$$

con $r^2 = r^2 - \delta^2$, $n(r)$ è la densità numerica.

L'energia potenziale Ω è, m è la massa di una singola galassia,

$$(4.3) \quad |\Omega| = 16 G m^2 \pi^2 \int_0^R n(r) dr \int_0^r n(r') r'^2 dr'$$

Derivando la (4.2) si ha

$$(4.4) \quad \frac{dS(\delta)}{d\delta} = -2\pi \delta n(\delta)$$

Gli integrali su Ω diventano

$$(4.5) \quad |\Omega| = 4 G m^2 \int_0^R \frac{dS}{d\delta} d\delta \int_0^\delta \frac{dS'}{d\delta'} \delta' d\delta'$$

Integrando successivamente per parti

$$(4.6) \quad |\Omega| = -4 G m^2 \int_0^R \frac{dS}{d\delta} d\delta S\delta = 2 G m^2 \int_0^R S^2(\delta) d\delta$$

Il raggio virializzato R_{VT} è quindi dato da

$$(4.7) \quad R_{VT} = 2 \left[\int_0^R S d\delta \right]^2 / \left[\int_0^R S^2 d\delta \right]$$

R_{VT} può essere ottenuto per integrazione su δ , che può essere misurata direttamente su una lastra fotografica.

La difficoltà è che \int dipende dalle correzioni dovute alle galassie del fondo, che sono importanti nelle regioni esterne dell'ammasso, e possono introdurre errori significativi in R_{VT} . Alternativamente la luminosità superficiale può essere misurata in cerchi successivi, concentrici al centro dell'am-

masso. Quello che si determina è

$$(4.8) \quad N(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) dz \approx 2 \int_0^{\infty} h(s) dz \quad s^2 = R^2 + z^2$$

Ad R fissato $s ds = z dz$, $dz = \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - R^2}}$, si ha allora

$$(4.9) \quad N(R) = 2 \int_R^{\infty} \frac{h(s) ds}{\sqrt{s^2 - R^2}}$$

Questa è un'equazione integrale in $n(s)$, che risolta dà

$$(4.10) \quad h(s) = -\frac{1}{\pi s} \frac{\partial}{\partial s} \int_s^{\infty} \frac{N(R) dR}{\sqrt{R^2 - s^2}}$$

Il vantaggio di questo metodo è che possono essere usate

tecniche fotometriche, invece di contare direttamente le galas-

sie su una lastra fotografica.

Un terzo metodo è di riferirsi ancora al modello di King e di trattare solo le regioni interne (Oemler 1974, Abell 1977).

Dalle eq. (2.6), (2.13)

$$(4.11) \quad \rho_G = \rho_{G0} \left[1 + \frac{r^2}{r_c^2} \right]^{-3/2} \quad r_c = 3 \left[\frac{\sigma^2}{4\pi G \rho_{G0}} \right]^{1/2}$$

Bahcall (1975) ha trovato, su una media di 15 ammassi

$$(4.12) \quad r_c = 0.25 \pm 0.04 \text{ Mpc}$$

Dressler (1978a) ricava un valore medio di 0.5 Mpc per r_c .

Queste incertezze in r_c si riflettono nella determinazione

del rapporto M/L.

Determinati r_c , σ_c e possibile risalire a ρ_{G0} .

Per il rapporto M/L_V sono stati trovati i seguenti valori

M/L_V	Ammasso	
280	Coma	(Rood et al. 1972)
350	Perseo	(Bahcall 1974)
250	Vergine	(Van den Bergh 1977)

Su un campione di 9 ammassi Dressler (1978b) conclude $\langle M/L_V \rangle \sim 270$.

Faber e Gallagher trovano per sette ammassi (usando il teorema del viriale), un valore medio $\langle M/L_V \rangle \sim 290$, con una escursione (165-800) .

Nelle stime viste prima vi sono notevoli incertezze, è quindi importante la possibilità di controllare, in modo indipendente dal teorema del viriale, il rapporto M/L per gli ammassi.

Inoltre, se valori così grandi per M/L fossero confermati, si sarebbe portati a concludere che la massa oscura domina gravitazionalmente l'Universo su grande scala.

Con l'aumentata capacità di calcolo dei computer è diventato possibile simulare il collasso di N corpi in interazione gravitazionale, con N abbastanza grande da essere significativo per gli ammassi ($N \sim 10^3$).

Per una data distribuzione iniziale delle masse le equazioni Newtoniane sono integrate numericamente per le N particelle.

White (1976) ha esteso un programma a N corpi di Aarseth (1969) per riprodurre la dinamica dell'ammasso della Coma, usando $N=700$.

La distribuzione di massa iniziale è assunta essere quella di luminosità trovata da Schechter (1976).

L'evoluzione del modello seguita al calcolatore mostra la tendenza del sistema a formare dei sotto ammassi isolati tra di loro, nell'avvicinarsi all'equilibrio viriale il sistema assume una fase molto più simmetrica, con una forte condensazione centrale.

Oemler (1974) trova per l'ammasso della Coma un raggio del viriale $R_{VT} \simeq 1.95$ Mpc. Le dispersioni di velocità sono prese da Rood et al. (1972). Con questi parametri è possibile scalare il modello.

White trova $M = (2.36 \pm 0.03) \cdot 10^{15} M_{\odot}$ ed un rapporto $\frac{M}{L_V} \simeq 258 \pm 36$.

Un punto delicato riguarda l'ipotesi che la distribuzione di luminosità rifletta fedelmente quella di massa.

Se parte della massa oscura è scorrelata dalla luce (cioè nell'Universo vi sono aggregati di massa oscura che non sono attaccati alla massa visibile), l'errore introdotto può essere significativo.

Un altro metodo per determinare il rapporto M/L per gli ammassi fa uso dei dati sull'emissione X. Gli ammassi di galassie risultano essere potenti sorgenti X (Giacconi et al. 1972, Jones et al. 1979).

L'emissione osservata si accorda con uno spettro di bremsstrahlung per un gas alla temperatura $T \approx 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ (Lea et al. 1973).

La densità del gas può essere calcolata dalla intensità della emissione, distanza e temperatura, ed è tipicamente $\rho \sim 10^{-26} \text{ g cm}^{-3}$.

La massa del gas è dell'ordine del 10% della massa del viriale ed è insufficiente a legare gravitazionalmente l'ammasso.

Se il gas è all'equilibrio dalla distribuzione del gas si può risalire alla forma del potenziale gravitazionale e quindi alla massa.

Questo problema è stato affrontato in dettaglio da Tanaka et al. (1982) con riferimento all'ammasso di Coma.

Essi assumono per il gas una distribuzione isoterma, in equilibrio idrostatico nel potenziale dell'ammasso e usano inoltre il modello di King per determinare la distribuzione delle galassie. Il risultato è

$$(4.13) \quad M_T = (2-3) \cdot 10^{15} M_\odot, \quad \left(\frac{M}{L}\right)_{\text{com}} \approx (100-250)$$

Metodi indipendenti fra loro hanno portato agli stessi risultati: il rapporto M/L per gli ammassi è molto grande, dell'ordine di 10^2 .

In Fig.2 è mostrato l'andamento del rapporto M/L, per vari sistemi extra-galattici, in funzione della scala considerata (Rood 1981).

§5 - Il teorema del viriale cosmico

Consideriamo un Universo in espansione, omogeneo ed isotropo.

A questo fluido aggiungiamo le strutture che vediamo oggi

(galassie, ammassi). E' possibile definire una densità

d'energia cinetica

$$(5.1) \quad T = \frac{1}{2} \langle \rho v^2 \rangle$$

dove v è la velocità rispetto al fondo in espansione e la media è presa su tutto lo spazio.

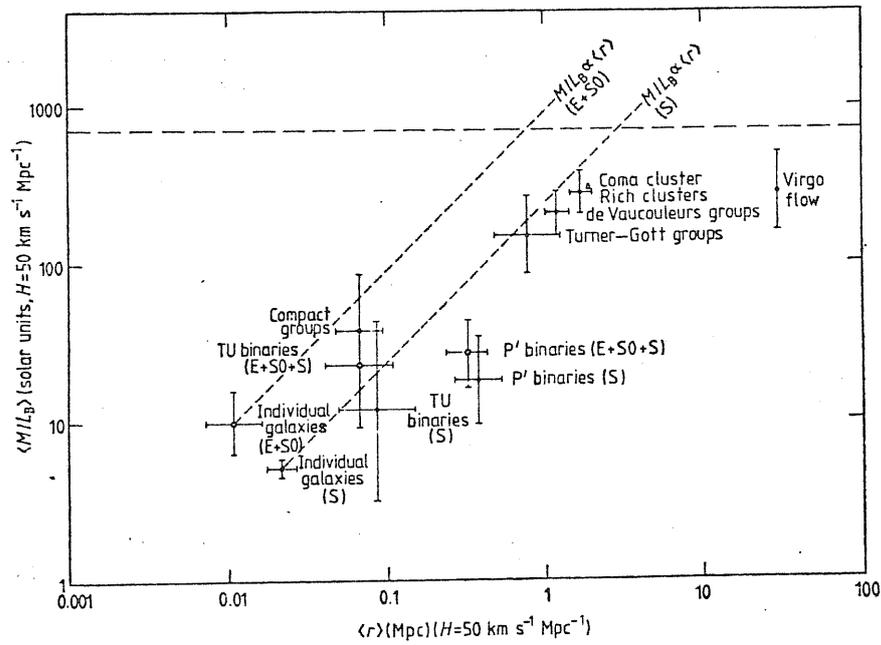


Figure 2. Average mass-to-light ratio plotted against linear length scale (average radius) for individual galaxies (spiral (S) and elliptical+lenticular (E+S)), binary galaxies (Turner (TU) and Peterson (P') samples), groups of galaxies (de Vaucouleurs and Turner-Gott samples), rich clusters, the Coma cluster, and the Local Supercluster. Broken lines labelled $M/L_B \propto \langle r \rangle$ are theoretical extrapolations assuming that the mass distribution corresponding to the observed flat rotation curve of a galaxy extends to larger radii. The horizontal broken line represents the critical mass-to-light ratio that would just close the Universe (from Rood 1981).

In modo simile possiamo definire una densità d'energia potenziale W , attraverso il potenziale perturbato

$$(5.2) \quad \delta \phi(\vec{r}) = G \int \frac{\delta \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

W è allora

$$(5.3) \quad W = \frac{1}{2} \langle \epsilon \delta \phi \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{G}{2V} \iint \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} dV dV'$$

Il contrasto di densità è definito da $\delta(\vec{x}) = \frac{\delta \rho(\vec{x})}{\bar{\rho}}$, esso è collegato alla funzione di covarianza a due punti $\xi(\vec{r})$ da

$$(5.4) \quad \xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{y} + \vec{x}) \delta(\vec{y}') \rangle$$

$\xi(\vec{r})$ definisce la probabilità di trovare la galassia 2 in dV_2 , quando la galassia 1 è in dV_1

$$(5.5) \quad dP = n^2 [1 + \xi(\vec{r})] dV_1 dV_2 \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

dove n è la densità numerica media.

Peebles (1978, vedi referenze citate) ha studiato estesamente questo tipo di approccio statistico per indagare la distribuzione spaziale delle galassie.

Sperimentalmente si trova

$$(5.6) \quad \xi(r) = \left(\frac{r_c}{r} \right)^\gamma \quad \gamma = 1.8$$

su distanze $100 h^{-1} \text{kpc} < r < 10 h^{-1} \text{Mpc}$ (Peebles e Hauser 1974)

e $r_c = (8.4 \pm 0.6) h^{-1} \text{Mpc}$ (KOS, Kirschner, Oemler e Schechter 1978).

La conoscenza di ξ su grande scala è limitata dalla profondità, ampiezza ed omogeneità del catalogo di galassie scelto.

I calcoli per la dimostrazione del teorema del viriale cosmico sono piuttosto complicati (Layzer 1963, Irvine 1965),

ne daremo solo una versione semplificata.

Fra T e W esiste la relazione (Geller e Peebles 1973)

$$(5.7) \quad T = -\gamma(\Omega) W$$

dove $\gamma(\Omega)$ è una funzione di ordine uno.

Dato che $T \propto \Omega$ e $W \propto \Omega^2$ è possibile risolvere l'equazione per Ω .

I vantaggi di questo metodo è che non vi sono i problemi di contaminazione che rendono così difficile stimare M/L per i gruppi di galassie.

Dalla definizione di $\xi(\vec{x})$ e dalla equazione (5.4) l'integrale per W diventa

$$(5.8) \quad W = \frac{G}{2} \bar{\rho}^2 \int \frac{\xi(\vec{x}') dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Se $\xi(r)$ ha la forma data dalla (5.6) si ha

$$(5.9) \quad W \sim -G \bar{\rho}^2 r_c^\delta r^{-\delta+2}$$

Risolvendo per Ω (da 5.1, 5.3 e 5.7)

$$(5.10) \quad \Omega \sim \langle \omega^2 \rangle^{1/2} \left(\frac{1}{hr_c} \right)^\gamma \left(\frac{1}{ht} \right)^{2-\gamma}$$

Per stimare ξ Peebles (1979b) ha usato il campione di galassie di KOS.

Il catalogo di KOS ha un numero relativamente piccolo di galassie (166), tuttavia esso è abbastanza profondo, la magnitudine limite è $m \leq 15$.

Esso dovrebbe quindi costituire un campione rappresentativo dell'Universo su scale di 10 Mpc.

Scelta una galassia i , del catalogo di KOS, la galassia j ha una separazione relativa alla i con componenti

$$(5.11) \quad \pi_j = c \frac{|z_j - z_i|}{H} \quad \sigma_j = \frac{cz_i \theta_{ij}}{H}$$

dove θ_{ij} è la separazione angolare, π_j la distanza apparente relativa e σ_j la distanza propria proiettata, normale alla linea di vista.

Per la galassia i il numero di galassie nell' N -esima cella di σ ed M -esima cella di π è

$$(5.12) \quad I_i(M, N) = n \left[1 + \xi(M, N) \right] \delta A_i(N) \delta \pi \phi(r_i)$$

$\delta A_i(N)$ è l'area dell'anello di raggio $N \delta \sigma$ e $\phi(r_i)$ è

la probabilità di trovare la galassia i nel catalogo.

Tenendo fissati M ed N e facendo una media sul campione, cioè

su i , che tenga conto di ϕ_i , è possibile stimare la ξ .

Peebles usa intervalli di coordinate $\delta\sigma = \delta\pi = 1h^{-1} \text{ Mpc}$.

I dati ottenuti sulla ξ sono quelli già riportati per la (5.5).

Per la galassia j il red shift relativo $z_j - z_i$ è la som-

ma di quello cosmologico e di quello dovuto al moto peculiare w .

La $\xi(\sigma, \pi)$ sarà allora

$$(5.13) \quad \xi(\sigma, \pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dw f(w) \xi \left[\left(\sigma^2 + \left(\pi - \frac{w}{H} \right)^2 \right)^{1/2} \right]$$

Dove $f(w)$ è una funzione di distribuzione.

Peebles trova che il best fit è ottenuto per

$$(5.14) \quad f(w) \propto \exp \left\{ -\sqrt{2} |w| / \sqrt{\langle w^2 \rangle} \right\}$$

con

$$(5.15) \quad \langle w^2 \rangle^{1/2} = (500 \pm 200) \text{ km sec}^{-1}$$

Questo dà per Ω

$$(5.16) \quad \Omega \approx 0.36 \pm 0.22$$

Nell'usare questo metodo vi sono alcuni problemi.

La $\xi(r)$ è conosciuta fino a distanze dell'ordine di 10 Mpc.

I limiti vengono essenzialmente dalla magnitudine massima del

catalogo usato. A distanze più grandi non è detto che

scali come r^{-2} :vi potrebbero quindi essere problemi di convergenza nell'integrale di W.

La dispersione inoltre è stimata per un campione troppo piccolo di galassie, in effetti l'errore nella (5.15) è grande.

Applicando il teorema del viriale cosmico su un campione meno profondo ($m \leq 13$), Geller e Davis (1978) trovano $\Omega \approx 0.2-0.3$.

§6 - Dinamica del superammasso locale (LSC)

Un anisotropia dipolare nella radiazione di fondo è stata osservata da Corey e Wilkinson (1976), Smoot et al. (1977).

L'anisotropia di dipolo nel fondo la si può scrivere come

$$(6.1) \quad T(\hat{n}) = T_0 (1 + \Delta T \cos \theta) = T_0 + \vec{T} \cdot \hat{n}$$

dove T_0 è la temperatura media e $T(\hat{n})$ la temperatura nella direzione \hat{n} . Misure recenti per il ΔT danno

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta T = (3.61 \pm 0.54) \cdot 10^{-3} \text{°K} \quad \alpha = 11^{\text{h}}.23 \pm 0^{\text{h}}.46 \quad \delta = 19^{\circ} \pm 7^{\circ}.5 \\ \text{(Gorenstein e Smoot 1981)} \\ \Delta T = (3.78 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{°K} \quad \alpha = 11^{\text{h}}.6 \pm 0^{\text{h}}.2 \quad \delta = -12^{\circ} \pm 5^{\circ} \\ \text{(Boughn et al. 1981)} \end{array} \right.$$

La velocità del sole rispetto alla galassia è di 250 Kmsec^{-1}

verso $l^{\text{II}} = 90^{\circ}$, $b^{\text{II}} = 0^{\circ}$ (Schmidt 1965).

Le misure ora riportate si traducono per la galassia in una

velocità rispetto al fondo di

$$(6.3) \quad V_G = (520 \pm 40) \text{ km sec}^{-1} \quad \text{verso} \quad l^{\text{II}} = 262^\circ \pm 8^\circ, b^{\text{II}} = 41^\circ \pm 6^\circ$$

Definendo coordinate cilindriche supergalattiche, con l'asse r diretto verso Virgo, abbiamo (White 1980)

$$(6.4) \quad \vec{v}_G \equiv (v_r, v_\theta, v_z) = (420 \pm 40, 130 \pm 40, 280 \pm 40) \text{ km sec}^{-1}$$

La (6.4) indica per la nostra galassia una velocità peculiare diretta principalmente verso Virgo, ma con una componente z significativa.

La velocità osservata non può assolutamente essere interpretata come primordiale. Nell'ipotesi di una espansione adiabatica, se σ è la dispersione di velocità, abbiamo

$$(6.5) \quad \frac{dE_{\text{cin}}}{dt} = m\sigma \frac{d\sigma}{dt} = -p \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{E_{\text{cin}}}{V} \frac{dV}{dt} = -\frac{m\sigma^2}{R} \frac{dR}{dt}$$

quindi $\sigma \propto R^{-1}(t) \propto 1+z$.

Allora alla ricombinazione la velocità doveva essere ultra-relativistica, il che appare implausibile.

L'ipotesi più naturale è che forze gravitazionali siano alla origine della velocità osservata.

Assumiamo che queste siano dovute a inomogeneità materiali di scala r_L e contrasto $\delta_L = \delta\rho/c$. Questo implica per v_p

$$(6.6) \quad \sigma_p \sim \frac{G \Omega}{r_L^2} \rho_c r_L^3 \delta_L t_0 \sim \Omega \delta_L H_0 r_L \sim 400 \text{ km sec}^{-1}$$

La forma della $\xi(r)$ (Peebles, 1978), suggerisce che lo spettro delle perturbazioni primordiali sia della forma

$$\delta_L \sim r^{-\frac{1}{2}(3+h)} \sim M^{-\frac{1}{2}-\frac{h}{6}} \quad \text{dove } n \text{ è l'indice spettrale } |\delta_{\vec{k}}|^2 = k^n,$$

$\delta_{\vec{k}}$ è la trasformata di Fourier di δ_L . Il contributo principale a v_p verrà da perturbazioni su grande scala se $\delta_L r_L$ cresce con r_L , cioè $h < -1$. Il caso $n=0$ è quello di rumore bianco ed è quello suggerito da Peebles. Goot e Rees (1975) trovano che la ξ su grande scala è meglio descritta da $h \approx -1$. Distinguiamo i vari casi a seconda della scala della perturbazione.

Nel caso di una perturbazione su grande scala (dell'ordine del raggio di Hubble, $r_L \gtrsim (t_0)$) domineranno effetti di relatività generale. Non ci soffermeremo su questa eventualità limitandoci a considerare che se a produrre l'anisotropia di dipolo è una cosmologia omogenea essa non può essere di tipo semplicemente anisotropo. Un'espansione anisotropa irrotazionale, cioè con differenti valori del rate di Hubble lungo i tre assi, non basta da sola a spiegare l'anisotropia osservata.

Sono richieste cosmologie più generali (White 1980), forse non omogenee, che potrebbero avere inconsistenze con il quadro standard della nucleosintesi cosmologica (Barrow 1976).

Consideriamo adesso perturbazioni su grande scala ma tali che

$r_L \ll c t_0$. Se $\delta_L \ll 1$ si può applicare la teoria lineare

delle perturbazioni, la velocità peculiare ad ogni punto sarà (Peebles 1976)

$$(6.7) \quad \vec{v}_p(\vec{x}, t_0) = \vec{v}_g(\vec{x}, t_0) \frac{2}{3} f(x) / H_0 \Omega$$

con $f(x) \approx \Omega^{0.6}$. Notiamo che in questo caso la velocità indotta è diretta esclusivamente verso il baricentro del sistema. Quindi, mentre la componente r si può interpretare semplicemente come dovuta all'azione dell'ammasso della Vergine, la componente z di v_p deve essere imputabile ad aggregati di materia ancora più distanti.

Una situazione completamente diversa la si ha se $\delta_L \gg 1$.

In tal caso la teoria lineare delle perturbazioni non è più applicabile. White e Silk (1979) hanno considerato la crescita e il collasso di una perturbazione ellissoidale omogenea, prendendola come modello per la formazione di oggetti come

il LSC. A causa delle forti asimmetrie previste nella distribuzione di materia durante il collasso, non è più necessario che v_p sia parallelo alla forza peculiare attuale.

Un applicazione del modello al LSC predice una costante di Hubble che è circa il 27% più piccola rispetto al valore per sistemi più distanti, se l'anisotropia osservata per il fondo è identificata con la velocità peculiare dovuta al collasso. Il modello predice inoltre $\Omega \approx 1$.

Dati essenziali per la verifica di questi modelli possono essere forniti da osservazioni ottiche di eventuali anisotropie nel flusso di Hubble.

Su questo punto la situazione sperimentale non è chiara.

Sandage e Tamman (1975) negano che nei loro dati ci siano visibili anisotropie apprezzabili. De Vaucoulers (1976), invece, trova effetti sistematici nei dati di Sandage Tamman, che egli interpreta come anisotropie nel campo di velocità locale.

Una serie di lavori di Aaronson et al. (1979, 1982) sembrerebbe in accordo con De Vaucoulers. Essi trovano che la costante di Hubble nel LSC è di circa il 30 % più piccola rispetto al va-

lore trovato per sistemi più distanti.

Nel derivare il risultato essi usano la relazione di Tully-Fischer (TF, 1977), che è una relazione tra la magnitudine assoluta M_B e la larghezza totale della riga a 21 cm dell'HI.

Anche se non è dimostrata in modo completamente formale questa relazione appare fisicamente plausibile: ΔV è proporzionale a V_{MAX} che è proporzionale ad M , cioè alla luminosità.

Aaronson et al. hanno dimostrato che la TF può essere vantaggiosamente applicata nell'IR, dove i problemi evolutivi e di estinzione galattica sono molto minori.

La TF appare quindi un potente indicatore di distanza.

In sintesi appare plausibile che il moto della nostra galassia rispetto al fondo di microonde sia il risultato del collasso del LSC, in un Universo con $\Omega \approx 0.2-0.7$.

§7 - Densità di luminosità

Le stime precedenti di Ω , basate sulla determinazione del rapporto M/L , richiedono ovviamente la conoscenza della densità di luminosità $\mathcal{L} \sim \frac{L}{D^3} \sim H_0$.

Per stimare \mathcal{L} introduciamo la funzione di luminosità $\Phi(L)$

definita da

$$(7.1) \quad dN = \bar{\Phi}(L) dL dV$$

dN è il numero di galassie tra $L, L+dL$ e $V, V+dV$.

La densità di luminosità è allora

$$(7.2) \quad \mathcal{L} = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}(L) dL dV$$

e

$$(7.3) \quad c = \mathcal{L} \frac{M}{L}$$

Felten (1977) ha confrontato nove diverse determinazioni per la $\bar{\Phi}(L)$. Tenendo conto dei vari fattori nel confrontare le misure (diverse costanti di Hubble, sistemi di magnitudine, funzioni di assorbimento galattico, diverse definizioni) Felten

conclude che la $\bar{\Phi}$ ha la forma suggerita da Schechter (1976)

$$(7.4) \quad \bar{\Phi}(L) dL = \bar{\Phi}_* e^{-L/L_*} \left(\frac{L}{L_*}\right)^{\alpha} d\left(\frac{L}{L_*}\right) M_{pc}^{-3}$$

con $\bar{\Phi}_* = 2.2 \cdot 10^{-3} h^{+3} M_{pc}^{-3}$, $L_* = 3.2 \cdot 10^{10} h^{-2} L_{\odot}$; $\alpha \approx -5/4$

\mathcal{L} è allora data da

$$(7.5) \quad \mathcal{L} \approx 1.2 \cdot 10^8 h L_{\odot} M_{pc}^{-3}$$

Per un M/L medio $\langle M/L \rangle \approx 300$, si ha per Ω

$$(7.6) \quad \Omega \approx \frac{\langle M/L \rangle}{c/\mathcal{L}} \approx 0.2$$

II. L'ETA' DELL'UNIVERSO

§1- Parametri fondamentali

Assumendo che la costante cosmologica Λ sia zero l'Universo di Friedman-Robertson-Walker può essere descritto da due parametri: la costante di Hubble

$$(1.1) \quad H_0 = \left(\dot{R} / R \right)_0$$

dove $R(t)$ è il fattore di scala dell'Universo, e il parametro di decelerazione

$$(1.2) \quad q_0 = - \left(\frac{\ddot{R} R}{\dot{R}^2} \right)_0$$

che è collegato alla densità media della materia da

$$(1.3) \quad \rho_0 = \frac{3 H_0^2}{4 \pi G} q_0$$

Possiamo definire una densità critica ed un parametro adimensionale Ω

$$(1.4) \quad \rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} \quad \Omega = \rho_0 / \rho_c = 2 q_0$$

La scala di distanza extragalattica

Le stime di H_0 che si possono trarre nella letteratura

(Sandage e Tamman 1976, De Vaucoulers 1979), stanno

nell'intervallo

$$(1.5) \quad 40 \leq H_0 \leq 100 \quad \text{Km sec}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$$

Ω

Il limite inferiore ad Ω viene dalla massa contenuta nelle galassie $\Omega_{\text{min}} > 5 \cdot 10^{-2}$ (Gott et al. 1974; un limite superiore da $q_0 < 1$ (Sandage 1973), cosicchè

$$(1.6) \quad 5 \cdot 10^{-2} < \Omega < 2$$

§2 - L'età dell'Universo

L'età dell'Universo può essere espressa in termini di H_0 ed Ω con la relazione (Weinberg 1972.)

$$(2.1) \quad t_0 = f(\Omega) / H_0$$

dove

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\Omega) = \frac{\Omega}{2} (\Omega - 1)^{-3/2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{2}{\Omega} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega} (\Omega - 1)^{1/2} \right] \quad \Omega > 1 \\ f(\Omega) = \frac{2}{3} \quad \Omega = 1 \\ f(\Omega) = (1 - \Omega)^{-1} - \frac{\Omega}{2} (1 - \Omega)^{-3/2} \cosh^{-1} \left(\frac{2}{\Omega} - 1 \right) \quad \Omega < 1 \end{array} \right.$$

Un limite inferiore a t_0 viene dall'età degli ammassi globu-

lari (Iben 1974), che, secondo Iben, può essere espressa dalla formula

$$(2.3) \quad \log t_c \approx 0.035 + 2.085(0.3 - Y) - 0.034 \lg(Z+3)$$

dove t_c è in unità di 10^{10} yr, Y e Z sono le abbondanze chimiche. Per $Y \leq 0.25$ (vedi III-§1) abbiamo ($Z \approx 10^{-3}$)

$$(2.4) \quad t_c > 13 \cdot 10^9 \text{ yr}$$

Nucleocosmocronologia

Il termine nucleocosmocronologia indica il metodo con il quale le età nucleari sono determinate dalle abbondanze misurate dei nuclei radioattivi a lunga vita.

Si assume che il tempo tra l'origine dell'Universo e l'inizio della nucleosintesi sia breve in confronto all'età dell'Universo.

Gli isotopi sono principalmente prodotti da processi di tipo r, che avvengono nelle esplosioni di supernovae.

I progenitori delle supernovae sono stelle massive con una breve vita media (10^7 yr) .

Isotopi a lunga vita potrebbero fornire una stima della durata totale della nucleosintesi.

L'età della galassia calcolata dalla cosmocronologia delle

coppie a lunga vita $^{232}\text{Th}/^{238}\text{U}$, $^{187}\text{Re}/^{187}\text{Os}$ pone un limite

inferiore all'età dell'Universo (Schramm e Symbalisty 1981)

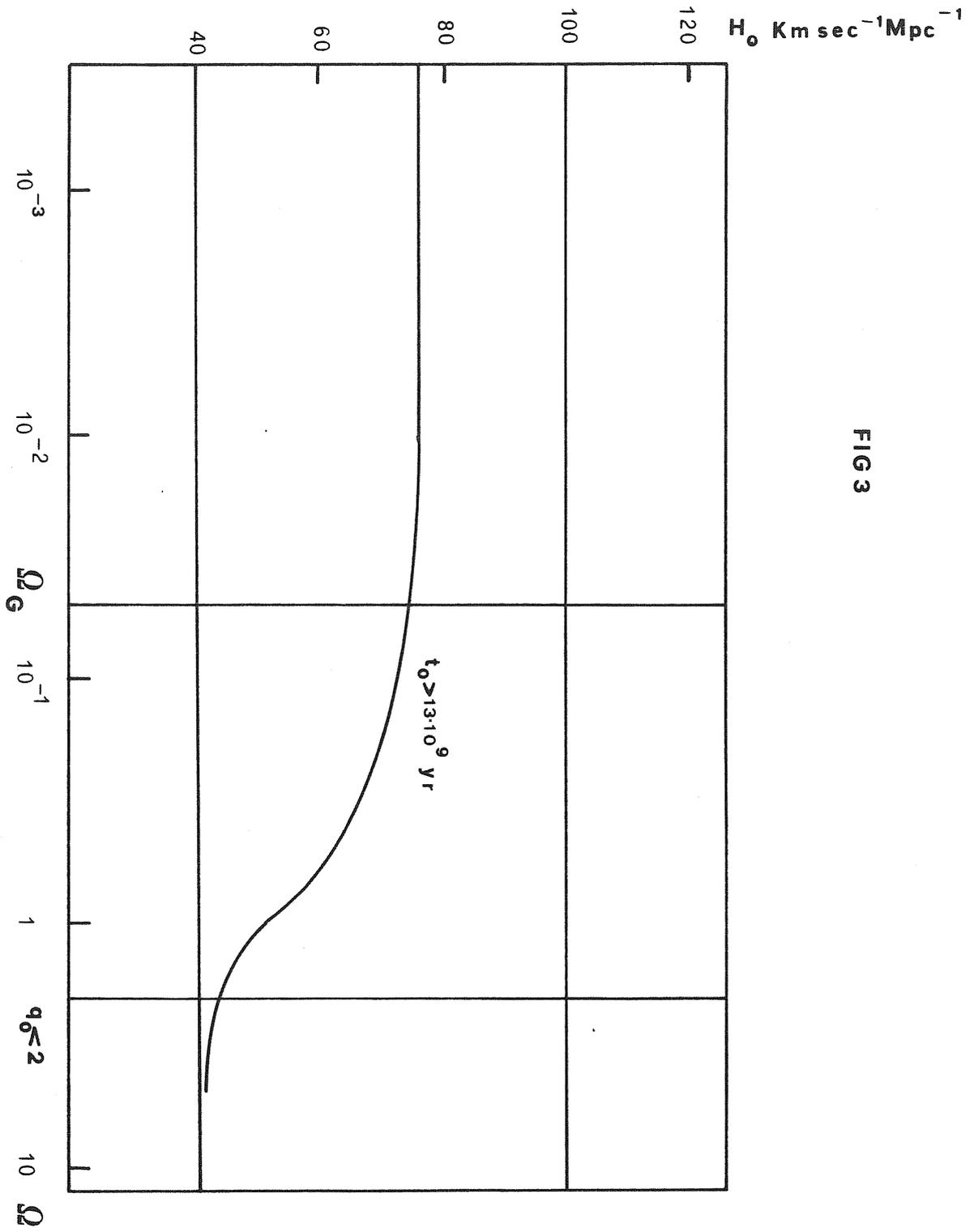
$$(2.5) \quad t_0 > 8.4 \cdot 10^9 \text{ yr}$$

In Fig.3 è mostrato un diagramma $H_0 - \Omega$ con le varie limitazioni.

Una espressione approssimata per le eq. (2.2) , con $\Omega \ll 1$, è

$$(2.6) \quad t_0 \simeq \frac{21 \cdot 10^9 \text{ yr}}{h \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right)}$$

FIG 3



III. IL CONTRIBUTO NUCLEONICO A Ω

§1 - L'abbondanza primordiale di elio

Per stimare l'abbondanza attuale di elio Y ci sono vari metodi (relazione massa-luminosità, spettri stellari, righe di ricombinazione nelle regioni HII, abbondanza solare).

Poichè siamo interessati all'abbondanza primordiale di elio, di origine cosmologica, dobbiamo riferirci a stelle il più antiche possibile; le associazioni stellari più antiche che conosciamo sono gli ammassi globulari. Si pensa che questi siano i campioni più puri di Pop. II.

La teoria per l'evoluzione degli ammassi globulari ci permetterebbe di determinare la loro abbondanza di elio, che deve essere in gran parte di natura primordiale.

La teoria per l'evoluzione delle stelle sul ramo orizzontale è stata fatta da Iben e Rood (1970), Iben (1974).

La determinazione di Y avviene confrontando le isocrone teoriche del diagramma H-R per l'ammasso con quelle osservate.

E' quindi una misura indiretta, che dipende inoltre dal modello evolutivo adottato per l'ammasso.

Demarque e McClure (1977) trovano per quattro ammassi globulari (M92, M15, M13, M3) un valore $Y \simeq 0.2$. Yang et al. (1979) confrontando questa ed altre determinazioni, concludono il seguente limite superiore per l'abbondanza primordiale di elio

$$(1.1) \quad Y_{\text{prim}} \lesssim 0.25$$

§2 - Deuterio

Una piccola frazione di deuterio sopravvive alla nucleosintesi; molto meno in un Universo ad alta densità che in uno a bassa densità, dato che il rate della reazione è proporzionale alla densità nucleonica e la probabilità di sopravvivenza è una funzione esponenzialmente decrescente del rate di reazione.

Le osservazioni fatte con il satellite Copernico, delle righe Lyman dell'idrogeno e del deuterio, danno un valore $\frac{D}{H} = (2 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}$ (York e Rogerson 1976) o $X_D = 2.5 (+0.7, -0.5) \cdot 10^{-5}$.

Probabilmente una considerevole frazione di deuterio è stata distrutta nelle stelle (Audouze e Tinsley 1974).

D'altra parte i processi stellari non producono quantità

apprezzabili di deuterio (Hoyle e Fowler 1973).

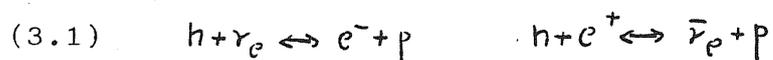
Si può quindi concludere

$$(2.1) \quad X_{D \text{ prim}} \approx 2 \cdot 10^{-5}$$

§3 - Nucleosintesi cosmologica

Accenniamo ai punti principali della teoria standard della nucleosintesi cosmologica; una trattazione dettagliata la si può trovare in Peebles (1971), Weinberg (1972).

A $T \geq 10^{10} \text{ K}$ i processi deboli del tipo



avvenivano abbastanza rapidamente ($\Gamma \gg H$, dove Γ è il rate delle reazioni e $H = \dot{R}/R$) da tenere il rapporto n/p al valore di equilibrio

$$(3.2) \quad \frac{n}{p} = e^{-\Delta/kT} \quad \Delta = (m_n - m_p)c^2 \approx 1.293 \text{ MeV}$$

Al momento del disaccoppiamento leptonic ($T \sim T_* \sim 10^{10} \text{ K}$)

$$(3.3) \quad \left(\frac{n}{p}\right)_* \approx e^{-\Delta/kT_*} \approx 0.16$$

Da T_* diviene importante il decadimento β del neutrone.

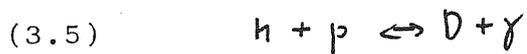
La concentrazione di neutroni in funzione del tempo ha un andamento

$$(3.4) \quad X_n(t) = X_n^{(0)} e^{-t/\tau}$$

con $\tau \approx 10^3$ sec.

Per la nucleosintesi gioca un ruolo fondamentale il deuterio.

La concentrazione di deuterio, X_D , è governata da reazioni del tipo



con X_D che ha una espressione analoga a quella di Saha

$$(3.6) \quad X_D = \frac{3}{\sqrt{2}} X_n X_p \varepsilon e^{B_D/kT}$$

B_D è l'energia di legame del deuterio ($B_D \approx 2$ MeV) e

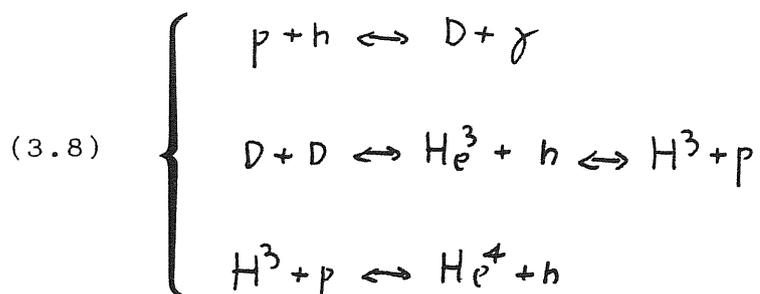
$$(3.7) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} h^3 n_N (2\pi m_N kT)^{-3/2}$$

Dato che il deuterio ha una energia di legame molto bassa,

per $T \gtrsim 10^9$ °K la fotodissociazione distrugge il deuterio non appena questi accenna a formarsi.

Al di sotto di una certa $T_D \approx 0.8 \cdot 10^9$ °K la concentrazione di deuterio diviene significativa e la nucleosintesi può iniziare.

I processi importanti sono quelli a due corpi



La mancanza di nuclei stabili con $A=5,8$ impedisce la formazione di nuclei più pesanti dell'elio; processi del tipo $\text{He}^4 + \text{H}^3 \rightarrow \text{Li}^7 + \gamma$, $\text{He}^4 + \text{He}^3 \rightarrow \text{Be}^7 + \gamma$ sono trascurabili rispetto ai (3.7), a causa della barriera coulombiana.

L'effetto finale della nucleosintesi è quello di incorporare tutti i neutroni disponibili in elio.

L'abbondanza prodotta di elio sarà

$$(3.9) \quad Y = 2X_n$$

dove X_n è la concentrazione di neutroni all'inizio della nucleosintesi. Wagoner (1973) dà per l'abbondanza finale di elio

$$(3.10) \quad Y \approx 0.262 + 0.0195 \log [\Omega h^2] + 0.38 \log (\xi/c)$$

dove ξ è un parametro del rate di espansione, $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \xi (2476c)^{1/2}$,

la vita media τ_n neutrone è scritta come $\tau_n = 716 \text{ sec} / c$.

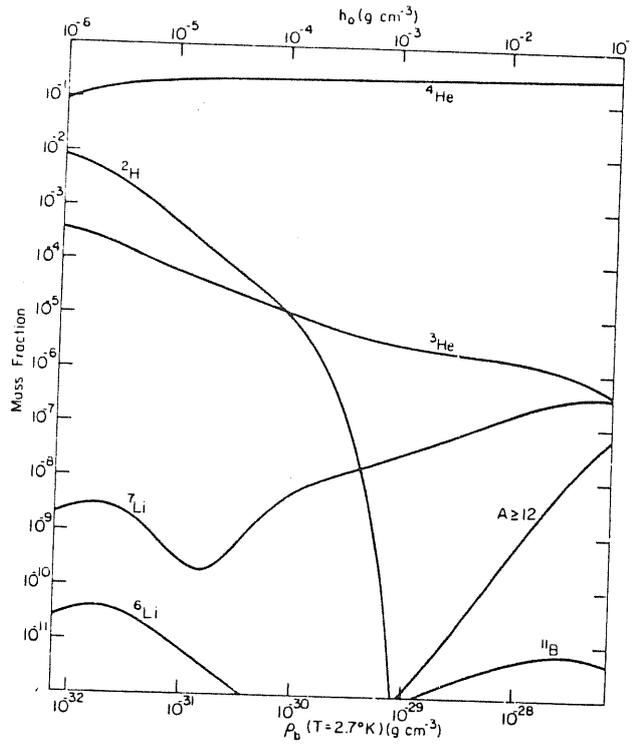
Nel modello standard $\xi = c = 1$.

In Fig.4 e Tav.5 sono mostrate le abbondanze finali dei vari

elementi, secondo Wagoner. (N.B.: per questi dati $h_0 = c_B / 4.15 \cdot 10^{-24}$)

Con $H_0 > 40 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ si hanno i seguenti limiti superiori al contributo nucleonico ad Ω

Fig. 4



T a v. 5

ELEMENT PRODUCTION IN "STANDARD" BIG BANG

$\log h_0$	$\rho_b(T = 2.7^\circ \text{K})$ (g cm^{-3})	$X(^2\text{H})$	$X(^3\text{He})$	$X(^4\text{He})$	$X(^6\text{Li})$	$X(^7\text{Li})$	$X(^{11}\text{B})$	$X(A \geq 12)$
-6.00	7.15×10^{-33}	8.5×10^{-3}	3.6×10^{-4}	0.089	2.6×10^{-11}	2.0×10^{-9}
-5.75	1.27×10^{-32}	5.5×10^{-3}	2.8×10^{-4}	0.131	3.7×10^{-11}	3.0×10^{-9}
-5.50	2.26×10^{-32}	3.1×10^{-3}	1.9×10^{-4}	0.171	3.6×10^{-11}	2.8×10^{-9}
-5.25	4.02×10^{-32}	1.4×10^{-3}	1.1×10^{-4}	0.200	2.3×10^{-11}	1.5×10^{-9}
-5.00	7.15×10^{-32}	5.8×10^{-4}	6.7×10^{-5}	0.217	1.1×10^{-11}	5.0×10^{-10}
-4.75	1.27×10^{-31}	2.2×10^{-4}	4.3×10^{-5}	0.227	4.5×10^{-12}	2.2×10^{-10}
-4.50	2.26×10^{-31}	8.9×10^{-5}	2.8×10^{-5}	0.234	2.0×10^{-12}	3.4×10^{-10}
-4.25	4.02×10^{-31}	3.6×10^{-5}	1.8×10^{-5}	0.240	...	1.2×10^{-9}
-4.00	7.15×10^{-31}	1.3×10^{-5}	1.2×10^{-5}	0.246	...	3.5×10^{-9}
-3.75	1.27×10^{-30}	3.3×10^{-6}	8.5×10^{-6}	0.251	...	7.2×10^{-9}
-3.50	2.26×10^{-30}	3.9×10^{-7}	5.8×10^{-6}	0.255	...	1.2×10^{-8}
-3.25	4.02×10^{-30}	9.8×10^{-9}	4.1×10^{-6}	0.260	...	1.7×10^{-8}
-3.00	7.15×10^{-30}	1.2×10^{-11}	3.3×10^{-6}	0.265	...	2.5×10^{-8}
-2.75	1.27×10^{-29}	...	2.7×10^{-6}	0.270	...	3.8×10^{-8}	1.0×10^{-12}	2.4×10^{-12}
-2.50	2.26×10^{-29}	...	2.4×10^{-6}	0.275	...	6.0×10^{-8}	1.7×10^{-12}	1.0×10^{-11}
-2.25	4.02×10^{-29}	...	2.1×10^{-6}	0.280	...	9.4×10^{-8}	2.7×10^{-12}	5.0×10^{-11}
-2.00	7.15×10^{-29}	...	1.8×10^{-6}	0.284	...	1.5×10^{-7}	4.0×10^{-12}	2.5×10^{-10}
-1.75	1.27×10^{-28}	...	1.5×10^{-6}	0.289	...	2.2×10^{-7}	5.4×10^{-12}	1.2×10^{-9}
-1.50	2.26×10^{-28}	...	1.1×10^{-6}	0.294	...	3.0×10^{-7}	6.4×10^{-12}	5.4×10^{-9}
-1.25	4.02×10^{-28}	...	7.8×10^{-7}	0.299	...	3.7×10^{-7}	6.2×10^{-12}	2.1×10^{-8}
-1.00	7.15×10^{-28}	...	4.3×10^{-7}	0.304	...	3.7×10^{-7}	4.6×10^{-12}	6.5×10^{-8}

NOTE.—Three leaders (...) indicates $X < 10^{-12}$.

$$(3.11) \left\{ \begin{array}{l} Y_{50.29} \rightarrow \Omega_N < 0.12 \quad (\text{Yang et al. 1979}) \\ X_D > 2 \cdot 10^{-5} \rightarrow \Omega_N < (0.1 - 0.08) \quad (\text{Gott et al. 1974}) \end{array} \right.$$

Anche se questi limiti per Ω_N sono stati estensivamente usati nella letteratura, l'uso della teoria cosmologica della nucleosintesi richiede una certa attenzione. Le possibili sorgenti di incertezze sono considerate nel prossimo paragrafo.

§4 - Alternative alla nucleosintesi standard

L'elio prodotto è il risultato della competizione tra due processi: il decadimento β del neutrone e la fotodissociazione del deuterio.

Il parametro ξ dà una misura del rate di espansione e gioca un ruolo molto importante nel determinare Y (Rees 1978a).

ξ sarebbe più alto nei seguenti casi:

- 1) Cosmologie anisotrope
- 2) G non è costante ma varia con il tempo (Brans e Dicke 1961);
nel passato il suo valore era più grande di quello attuale.
- 3) Vi sono altre particelle oltre quelle conosciute; all'epoca della nucleosintesi $\rho(\tau)$ era più grande di quanto stimato.

Un aumento di ξ , cioè del rate di espansione, si traduce in un disaccoppiamento, per le interazioni deboli, a temperature più alte. L'effetto è quello di aumentare i neutroni disponibili alla nucleosintesi ($\frac{n}{p} = e^{-\Delta/kT} \rightarrow 1$) e quindi Y . Tuttavia ξ non può aumentare troppo, perchè altrimenti al momento d'inizio della nucleosintesi non vi sarebbero più neutroni disponibili a causa del decadimento β .

Per $\xi \geq 10^6$ $Y=0$, $X_D < 10^{-4}$.

Nel modello standard l'Universo è simmetrico dal punto di vista leptonico (vedi IV-§1). Un eccesso di ν_e o $\bar{\nu}_e$ si traduce in un potenziale chimico μ_{ν_e} diverso da zero per i neutrini.

L'effetto è quello di aumentare la $\rho(T)$ e quindi l'espansione.

I neutrini elettronici riducono la n/p attraverso reazioni del tipo $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$, mentre gli antineutrini interagiscono con i protoni tramite $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$.

Gli effetti ora menzionati si compensano (grosso modo) tra di loro.

Wagoner, Fowler e Hoyle (1967) hanno tenuto conto di possi-

bili effetti di degenerazione neutrinica nella nucleosintesi cosmologica. Un eccesso leptonico per barione $n_{\nu_e}, n_{\bar{\nu}_e} / n_B \gg 10^8$ sopprime del tutto la produzione di elio, anche se accelera l'espansione. Assimetrie meno marcate mantengono l'abbondanza di elio nei valori del modello standard.

Se vi sono altre specie di leptoni, oltre quelle conosciute, esse andrebbero ad aumentare la $\rho(T)$ e quindi il rate di espansione.

I limiti superiori a Y indicano che il numero di queste particelle deve essere ≤ 5 (Steigman 1980).

Il caso di leptoni neutri pesanti ($M_L \gtrsim 1 \text{ GeV}$) è stato discusso da Gunn et al. (1978). Queste particelle diventano non relativistiche quando sono ancora in equilibrio termodinamico con le altre specie presenti.

L'abbondanza n_L/n_γ è abbassata dalla presenza di un fattore di Boltzmann $e^{-m_L c^2/kT} \ll 1$, cosicchè la presenza di queste particelle non ha effetto sulla nucleosintesi.

Un'altra possibilità è che parte o tutta la radiazione di fondo abbia avuto origine dopo la formazione dell'elio, da parte

di sorgenti stellari massive, $M \leq 10^6 M_{\odot}$, formatesi subito dopo la ricombinazione (Popolazione III: Rees 1978b, Carr 1980).

In tal caso siamo in presenza di un big-bang "tiepido" o

"freddo" e la relazione tra Ω_M e γ sarà diversa da

quanto discusso in precedenza.

La teoria relativa non è stata ancora formulata in sufficiente dettaglio.

IV. NEUTRINI MASSIVI E COSMOLOGIA

Le equazioni III-(3.11) danno un limite superiore alla densità della materia ordinaria, sia o no luminosa.

Dalla discussione nel cap. III abbiamo concluso $\Omega_N < \Omega$ e che i nucleoni non forniscono tutta la massa presente nell'Universo.

Assumiamo $\Omega_N < \Omega$ ed esaminiamo le conseguenze di una massa non nulla per i neutrini.

§1 - Il modello standard e i neutrini massivi

Il modello standard si basa sulle seguenti assunzioni fondamentali:

- i) L'Universo era, ed è, omogeneo ed isotropo
- ii) Il campo gravitazionale è quello descritto dalle equazioni dei Einstein

Il modello cosmologico adottato è quindi quello di Friedman-Robertson-Walker (FRW).

Le densità osservate di materia e radiazione sono

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{m_0} = \Omega \rho_c = 5 \cdot 10^{-30} \Omega h^2 \text{ gr cm}^{-3} \\ \rho_{r_0} = \frac{a T_{r_0}^4}{c^2} = 4.5 \cdot 10^{-34} \text{ gr cm}^{-3} \end{array} \right.$$

con $\rho_c = 5 \cdot 10^{-30} \text{ h}^2 \text{ g cm}^{-3}$, $a = 7.65 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$, $T_{r0} = 2.7 \text{ }^\circ\text{K}$

Le leggi di conservazione danno

$$(1.2) \quad \begin{cases} \rho_m = \rho_{m0} (1+z)^3 \\ \rho_r = \rho_{r0} (1+z)^4 \end{cases} \quad 1+z = R_0 / R(t)$$

Per una espansione adiabatica $T_r = T_{r0} (1+z)$

L'Universo era dominato dalla radiazione a $\rho_r > \rho_m$,

cioè per $z > z_{eq}$, con

$$(1.3) \quad z_{eq} \approx 10^4 \Omega h^2$$

Nel modello di FRW l'equazione per l'evoluzione di $R(t)$ è

(alle epoche di interesse il termine kc^2 ed una eventuale costante cosmologica sono trascurabili per la dinamica)

$$(1.4) \quad (\dot{R}/R)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

A $z > z_{eq}$ $\rho \sim \rho_r \sim R^{-4}$ ed $R(t) = \text{const} \times \sqrt{t}$

Nell'era dominata dalla materia $\rho \sim \rho_m \sim R^{-3}$, si ha

$$R(t) \sim t^{2/3}$$

A $T < 10^{12} \text{ }^\circ\text{K}$ l'Universo era composto da elettroni, positroni, fotoni, neutrini ed antineutrini, più un certo numero, molto piccolo, di neutroni e protoni.

Assumendo equilibrio termodinamico tra le specie presenti le densità nello spazio delle fasi erano date da distribuzioni di Fermi-Dirac (FD) o Bose-Einstein (BE).

Se i è la generica particella reazioni del tipo $i + \bar{i} \leftrightarrow \gamma + \gamma$

assicurano $\mu_i = -\mu_{\bar{i}}$. I numeri quantici come carica o numero barionico sono zero o comunque piccoli.

Possiamo allora porre $\mu_i \approx 0$.

Per i neutrini questa è solo una congettura. E' possibile che vi siano state interazioni che abbiano prodotto un eccesso neutrinico oltre che barionico. Comunque l'ipotesi più semplice è che $(N_{\nu_i} - N_{\bar{\nu}_i}) / N_\gamma \ll 1$, cioè $\mu_{\nu_i} \approx 0$.

Nel seguito assumeremo tre specie di neutrini: ν_e, ν_μ, ν_τ .

La densità nello spazio delle fasi per la particella i è allora ($\hbar = c = k_B = 1$)

$$(1.5) \quad n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1} \quad \text{+FD, -BE}$$

La densità d'energia è la somma $e = \sum_i \rho_i$, con $\rho_i = \int_0^\infty E_i n_i d^3p$

$$(1.6) \quad e = \frac{\pi^2}{30} g_* T^3 \quad g_* = \sum \left[g_b + \frac{7}{8} g_f \right]$$

l'indice b ed f si riferisce a bosoni e fermioni.

La densità d'entropia $s = \sum_i (\rho_i + p_i) / T$ vale ($p = \frac{1}{3} e$)

$$(1.7) \quad s = g_* \frac{2\pi^2}{45} T^3$$

$$A \quad T < 10^{12} \text{ }^\circ\text{K} \quad g_* = g_\gamma + \frac{7}{8} [2g_e + 3g_\nu] \quad \text{con } g_\gamma = g_e = 2g_\nu = 2.$$

I neutrini sono accoppiati attraverso processi deboli del tipo

$$e^- + \mu^+ \leftrightarrow \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu, \quad \text{con una sezione d'urto (in unità CGS)}$$

$$\sigma \sim \frac{G_F^2 E^2}{(\hbar c)^4} \sim \frac{G_F^2 (kT)^2}{(\hbar c)^4} \sim 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad \text{a } T \sim 10^{10} \text{ }^\circ\text{K}, \quad G_F \text{ é}$$

$$\text{la costante di Fermi } G_F = 1.4 \cdot 10^{-49} \text{ erg cm}^3.$$

Il rate collisionale per questi processi è $\Gamma = \langle n\sigma v \rangle \simeq$

$$\simeq G_F^2 (kT)^5 (\hbar c)^{-7}. \quad \text{Il rate di espansione } H = \frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho \right)^{1/2}$$

$$\text{vale } H \simeq G^{1/2} (kT)^2 (\hbar c)^{-3/2}.$$

Le interazioni deboli cessano di essere efficaci, nel mante-

nere l'equilibrio termico, ad una temperatura tale che $\Gamma(T) < H(T)$.

Questo avviene a circa $10^{10} \text{ }^\circ\text{K}$.

Anche se i neutrini non subiscono più interazioni sia T_ν

che T_γ scalano come $R^{-1}(t)$ e $T_\nu = T_\gamma$ per $T < 10^{12} \text{ }^\circ\text{K}$

e fino al momento dell'annichilazione del gas e^+e^- .

Per $T < 0.5 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K} = T_{e^+e^-}$ elettroni e positroni si annichi-

lano, andando ad aumentare l'entropia del gas fotonico.

I neutrini non risentono di questo processo, sR^3 è costante

e dall'equazione (1.7)

$$(1.8) \quad \left(\frac{T_\nu}{T_\nu} \right)_{T < T_{\text{eff}}} = \left(\frac{11}{4} \right)^{2/3}$$

La temperatura attuale dei neutrini è più bassa di quella della radiazione, di un fattore dato dalla (1.8).

La scoperta di una massa neutrinica diversa da zero, con valori compresi tra $14 \text{ eV} < m_{\nu_e} < 46 \text{ eV}$, da parte di Lyubimov et al. (1980), ha condotto molti autori a considerare le conseguenze cosmologiche di una $m_\nu \neq 0$.

Come cambia il quadro presentato con l'ipotesi di neutrini massivi?

Se i neutrini hanno una massa $m_\nu \approx 10 \text{ eV}$ erano ultra relativistici all'epoca di cui abbiamo discusso.

A quelle temperature ($T \approx 10^{12} - 10^{10} \text{ }^\circ\text{K}$) il quadro del modello standard rimane sostanzialmente inalterato.

Un punto importante riguarda la questione degli stati di elicità. Anche se i neutrini hanno una massa ai fini pratici è ancora $g_{\nu i} \approx 1$ (Bond et al. 1980).

Indichiamo con ν_R un neutrino a elicità positiva e ν_L un neutrino a elicità negativa.

Se i neutrini sono accoppiati come nel modello di Weinberg-

Salam il rate per reazioni del tipo $e^+e^- \leftrightarrow \nu_R \nu_L$ è

più piccolo del rate per $e^+e^- \leftrightarrow \bar{\nu}_L \nu_L$ di un fattore dato

dal rapporto degli stati di elicità, cioè $\frac{N_R}{N_L} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \approx 1-\beta^2 \approx \left(\frac{m_\nu}{T}\right)^2 \ll 1$

I ν_R si sono disaccoppiati molto prima dei ν_L . Le anni-

chilazioni successive (adroni, mesoni) hanno prodotto princi-

palmente ν_L , per cui $T_{\nu_R} \ll T_{\nu_L}$.

La nucleosintesi cosmologica rimane imm modificata dalla presenza di una massa neutrinica.

I neutrini diventano non relativistici ad un red shift z_{NR}

tale che $\frac{1}{3} m_\nu \sim T = (1+z_{NR}) T_{y0}$

$$(1.9) \quad z_{NR} \sim 4 \cdot 10^4 m_\nu / (30 \text{ eV})$$

Al momento del disaccoppiamento i neutrini erano ancora

ultra relativistici e la funzione di distribuzione era

$$h(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E_\nu/T_+}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{p^2/T_+ + 1}} \quad \text{ed è rimasta immo-}$$

dificata da allora.

Questo significa che i neutrini attualmente sono in una situa-

zione di disequilibrio termodinamico: la loro densità nello

spazio delle fasi è quella di Fermi-Dirac UR, ma le velocità

sono non relativistiche.

Attualmente la loro dispersione di velocità è

$$(1.10) \quad \sigma = \sqrt{\overline{\sigma^2}} = 3.6 \frac{T_\gamma}{m_\gamma} \approx 5 \cdot 10^6 \frac{(1+z)}{m_\gamma(\text{eV})} \left(\frac{T_{\gamma 0}}{3^\circ\text{K}} \right) \text{ cm sec}^{-1}$$

Per la densità numerica si ha

$$(1.11) \quad N_{\gamma i} = \frac{4\pi g_{\gamma i}}{(2\pi)^3} T_\gamma^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1}$$

$$T_{\gamma 0} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_{\gamma 0}, \quad T_{\gamma 0} = 3 \cdot \theta^\circ\text{K}, \quad \text{e all'epoca attuale}$$

$$(1.12) \quad N_{\gamma i} \approx 75 \cdot g_{\gamma i} \theta^3 \text{ cm}^{-3}$$

Sommando sulle varie specie (e, μ, τ), $\rho = \sum N_{\gamma i} m_{\gamma i}$,

abbiamo ($m_{\gamma i} \equiv m_\gamma$)

$$(1.13) \quad \Omega_\gamma = 5 \cdot 10^{-2} h^{-2} \sum m_\gamma (\text{eV})$$

Dalle stime fatte nel cap. III. $\Omega_N \leq 0.1$, cosicchè la

massa in neutrini è dominante per (Schramm e Steigman 1981)

$$(1.14) \quad \sum m_\nu \geq 1.4 \text{ eV}$$

Dai limiti inferiori all'età dell'Universo (II-§2) e dalla

relazione tra t_0 ed Ω , si ha un limite superiore ad Ω_γ

($\Omega_\gamma \gg \Omega_N$), cioè (Zel'dovich e Syunyaev 1980)

$$(1.15) \quad \sum m_\nu \lesssim (20-30) \text{ eV}$$

Misure della massa neutrinica che eccedono il limite (1.15)

possono implicare una costante cosmologica diversa da zero, che

è l'ipotesi suggerita da Zel'dovich e Syunyaev. Altre possibili

lità saranno considerate nelle conclusioni.

V. INSTABILITA' GRAVITAZIONALE

§1 - Masse caratteristiche

Per produrre le strutture che vediamo oggi (galassie, ammassi) perturbazioni primordiali di densità dovevano essere presenti nelle fasi iniziali dell'Universo.

Per seguire l'evoluzione delle perturbazioni distingueremo nel seguito tre epoche di interesse: un'era a $t > t_{eq}$ dove l'Universo era dominato dalla radiazione (RD), un'epoca di transizione tra l'inizio dell'era dominata dalla materia (MD) e la ricombinazione, che avviene ad una temperatura $T_r \sim 3 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ ($t_r \sim 2 \cdot 10^3$), infine l'epoca post-ricombinazione, con $t < t_r$.

Le densità di materia e radiazione sono date dalla IV-(1.2).

Introduciamo alcune masse caratteristiche, che sono importanti per lo studio della dinamica delle perturbazioni.

Massa di Jeans

Introduciamo una lunghezza di Jeans

$$(1.1) \quad \lambda_J = \left(\frac{\pi v_s^2}{G \rho} \right)^{1/2}$$

dove v_s è la velocità del suono nel mezzo e ρ la densità.

La massa di Jeans è definita da

$$(1.2) \quad M_J = \frac{4\pi}{3} \rho \left(\frac{\lambda_J}{2} \right)^3$$

Perturbazioni di densità possono crescere solo per $\lambda > \lambda_J$

($M > M_J$), in quanto l'interazione gravitazionale è allora sufficiente a dominare la pressione e la perturbazione collassa.

Prima della ricombinazione il contributo principale alla pressione è dato dai fotoni: $p \approx p_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2$. Per $z > z_r$

dobiamo distinguere due epoche: a $z > z_{eq}$ e $z_{eq} > z > z_r$.

La velocità del suono per il fluido materia+radiazione è data da

$\sigma_s^2 = \left(\frac{\delta p}{\delta \rho} \right)_{\delta s=0}$, dove

$$(1.3) \quad \begin{cases} \delta \rho = (3\rho_m + 4\rho_r) \frac{\delta T}{T} \\ \delta p = \frac{4}{3} \rho_r \frac{\delta T}{T} \end{cases}$$

σ_s^2 è allora

$$(1.4) \quad \sigma_s^2 = \frac{c^2}{3} \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_m}{\rho_r}} = \frac{c^2}{3} \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{1+z_{eq}}{1+z}} \approx \frac{c^2}{3} \frac{1}{1 + \frac{1+z_{eq}}{1+z}}$$

Nell'espressione della massa di Jeans scriviamo

$$\rho = \rho_r \left[1 + \frac{\rho_m}{\rho_r} \right] = \rho_r \left[1 + \frac{1+z_{eq}}{1+z} \right] \quad \text{e otteniamo (} z > z_r \text{)}$$

$$(1.5) \quad M_J = 10^{17} \frac{(\Omega h^2)^\alpha}{\left[1 + \left(\frac{1+z_{eq}}{1+z} \right)^3 \right]} M_\odot \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ RD} \\ \alpha = -2 \text{ MD} \end{array}$$

Per $z > z_{eq}$ $\sigma_s \sim \frac{c}{\sqrt{3}}$ $M_J \sim \rho_m \rho_r^{-1/2} \sim (1+z)^{-3}$,

la massa di Jeans e quella d'orizzonte (vedi dopo) praticamente coincidono.

A $z \ll z_{eq}$ $\sigma_s \approx \frac{z}{3} c \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_m}} \sim (1+z)^{1/2}$, la

massa di Jeans prende un valore costante fino alla ricombinazione.

Dopo la ricombinazione è $\sigma_s^2 = \frac{5}{3} \frac{kT}{\mu p}$. A $z \sim z_r$ è $T \sim$

$\sim T_r \sim 3 \cdot 10^3 \text{ } ^\circ\text{K}$ cosicchè la massa di Jeans scende a circa $10^6 M_\odot$

Per una espansione adiabatica $T_m V^{2/3} = \text{cost}$ e $T_m \sim R^{-2} \sim (1+z)^2$,

a $z_r > z$ abbiamo

(1.6) $M_J \sim 10^6 (\Omega h^2)^{-1/2} \left(\frac{1+z}{1+z_r} \right)^{3/2} M_\odot$

Massa entro l'orizzonte

La massa dei barioni entro l'orizzonte è definita da $M_H =$

$= \frac{4\pi}{3} \rho_m (ct)^3$. Nell'era dominata dalla radiazione $R \sim$

$\sim \sqrt{t} \sim (1+z)^{-1}$, $M_H \sim (1+z)^{-3}$.

Per $z \ll z_{eq}$ $R \sim t^{2/3}$, $M_H \sim (1+z)^{-3/2}$.

Abbiamo per

(1.7)
$$\begin{cases} M_H \approx 10^{16} \Omega h^2 \left(\frac{1+z_{eq}}{1+z} \right)^3 M_\odot & \text{RD} \\ M_H \approx 2 \cdot 10^{17} (\Omega h^2)^{-1/2} \left(\frac{1+z_{eq}}{1+z} \right)^{3/2} M_\odot & \text{MD} \end{cases}$$

In Fig.5 sono mostrate $M_J(z)$ e $M_H(z)$.

Massa di scattering

Il libero cammino medio di un fotone, per scattering

Thomson, è $\lambda_{es} = \frac{1}{n_e \sigma_T} = 10^{24} h_e^{-2} \text{ cm}$. La massa as-

sociata è $M_{\tau=1} = \lambda_{es}^3 h_e m_p \approx 10^{48} h_e^{-2} \text{ yr}$,

per $z > z_r$

$$(1.8) \quad M_{\tau=1} = 10^6 (zh^2)^{-2} \left(\frac{1+z_r}{1+z} \right)^6 M_\odot$$

Per $M \gg M_{\tau=1}$ materia e radiazione possono trattarsi

come un singolo fluido.

Massa di Silk

Viene detta massa di Silk (Silk 1968) la massa minima di una perturbazione adiabatica che non sia smorzata prima della ricombinazione. In tale periodo il principale meccanismo di smorzamento è la diffusione radiativa.

Consideriamo un fotone con libero cammino medio λ_{es} .

Per coprire una distanza λ questo fotone impiega un tempo

$$t_{diff} \approx \lambda^2 / c \lambda_{es}$$

Perturbazioni con $\lambda < (ct \lambda_{es})^{1/2}$ sono trasparenti

alla radiazione, esse saranno smorzate. Dalle eq.(1.7),(1.8)

la massa di Silk è , per $z_{eq} > z > z_r$

$$(1.9) \quad M_S = (M_{r=1} M_H (MD))^{2/2} \approx 5 \cdot 10^{12} (\Omega h^2)^{-5/4} \left(\frac{1+z_r}{1+z} \right)^{15/4} M_\odot$$

§2 - Evoluzione delle perturbazioni e fluttuazioni del fondo di microonde (senza neutrini)

Per la dinamica delle $\frac{\delta\rho}{\rho}$ nelle epoche di interesse , nel caso senza neutrini, daremo solo i risultati principali, rimandando alla letteratura già citata (Weinberg 1972, Peebles 1978).

Per $z > z_{eq}$ e $\lambda > \lambda_J \approx \lambda_H$ perturbazioni adiabatiche ($\delta_r = \frac{4}{3} \delta_m$) e isoterme ($\delta_r = 0$, $\delta_m \neq 0$) cresceranno come $\delta \sim t$.

Da quando entrano nell'orizzonte, fino alla ricombinazione, le perturbazioni adiabatiche su scale $M > M_S$, oscillano come onde sonore; quelle su scale minori sono smorzate.

Le perturbazioni isoterme, invece, sono congelate fino a

$$z = z_r .$$

Dopo la ricombinazione M_J scende a $M_J \sim 10^6 M_\odot$,

perturbazioni con $M > M_J$ ricominceranno a crescere secondo

$$\delta \sim t^{2/3} .$$

Le perturbazioni adiabatiche hanno una scala di massa caratteristica che è quella di Silk, cioè $M \approx 10^{12+1} M_{\odot}$, una scala intermedia tra galassie e ammassi.

Nello scenario adiabatico si formano prima i grandi aggregati ($M \sim 10^{13} M_{\odot}$) e successivamente, per frammentazione del sistema durante lo stadio non lineare, le galassie.

Nello scenario isoterma si formano dapprima piccole strutture ($M \sim 10^6 M_{\odot}$), che successivamente si aggregano per formare aggregati sempre più grandi (galassie, ammassi, ...).

Per le perturbazioni adiabatiche un dato imbarazzante è la grande isotropia del fondo di microonde su piccola scala angolare. Esaminiamo questo punto più da vicino.

Si avrà collasso della perturbazione quando $\delta \sim 1$. Dopo la ricombinazione $\delta_m \sim t^{2/3} \sim (1+z)^{-1}$, per avere collasso al momento attuale $\delta_m(z_r)(1+z_r) = 1$, cioè

$$\delta_m(z_r) \geq 10^{-3}$$

Per una perturbazione adiabatica $\delta_r = 4 \frac{\delta T}{T} = \frac{4}{3} \delta_m$.

Se consideriamo la ricombinazione come un processo istantaneo,

avremo semplicemente $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{z_r} = \frac{1}{3} \delta_m(z_r)$, da confron-

tare con i limiti sperimentali $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-4}$ (Partridge 1980),
su scala angolare $\theta \approx 3'$.

In realtà la ricombinazione non è un processo istantaneo,
di conseguenza la superficie di ultimo scattering ha una pro-
fondità non trascurabile.

Le fluttuazioni di temperatura non avranno una espressione
semplice ($\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \delta_{\mu}$), ma vi sarà un integrale su z che
tenga conto dell'assorbimento (Syunyaev e Zel'dovich, SZ, 1970):

$$(2.1) \quad \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \delta_{\mu}(z) e^{-\tau} \frac{d\tau}{dz} dz$$

dove $\tau(z)$ è la profondità ottica in funzione di z :

$$(2.2) \quad \tau(z) = - \int_0^z n_e x(z) \sigma_T c \frac{dt}{dz} dz$$

n_e è la densità del plasma, σ_T la sezione d'urto per
scattering Thomson e $x(z)$ il grado di ionizzazione.

SZ trovano per $x(z)$

$$(2.3) \quad x(z) \approx \frac{A}{z/\Omega^2} e^{-B/z} \quad A \sim 10^7 h^{-1}, \quad B \sim 1.5 \cdot 10^4$$

tra $900 < z < 1500$, che sono i red shift di interesse.

Si ha $\tau \approx 1$ per $z_{sc} \approx 1050$, la funzione $e^{-\tau} \frac{d\tau}{dz}$

diminuisce in modo esponenziale per $z > z_{sc}$ e $z < z_{sc}$,

e diventa la metà del massimo a $z_3 = 960$ e $z_4 = 1135$.

Poichè $\delta_m(z)$ è una funzione molto più lentamente variabile di z il contributo principale all'integrale verrà da

$z_3 < z < z_4$. Le dimensioni lineari di questa regione sono al momento attuale

$$(2.4) \quad L_s \sim (c H_0^{-1} \Omega^{-1/2} z_{sc}^{-5/2} \Delta z) \quad z_{sc} \approx 30 \Omega^{-1/2} h^{-1} \text{ Mpc}$$

con $\Delta z = z_4 - z_3 = 175..$

Perturbazioni su scale $L \gg L_s$ non subiranno assorbimento apprezzabile e

$$(2.5) \quad \frac{\delta T}{T} \approx \frac{1}{3} \delta_m(z) \quad L \gg L_s$$

questo comunque su scale $L \ll L_H \sim 120 \text{ Mpc}$ (a z_{sc}), su scale più grandi gli effetti adiabatici vengono a mancare, dato che i fotoni potrebbero reagire alla perturbazione quando l'Universo è già diventato trasparente alla radiazione.

L'ampiezza angolare θ corrispondente alla scala lineare

$L(z)$, al red shift z , è data da

$$(2.6) \quad \theta \approx \frac{L(z) H_0}{z c \Omega z} \quad z \gg z^{-1}$$

Per il $\frac{\delta p}{\rho}$ attuale scriviamo $\left(\frac{\delta p}{\rho}\right)_0 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}(3+h)}$

(Peebles 1978) con $r_0 \sim 10 h^{-1} \text{ Mpc}$.

Abbiamo allora per il $\frac{\Delta T}{T}$ come funzione della scala

angolare

$$(2.7) \quad \frac{\Delta T}{T} \approx \begin{cases} 1.4 \cdot 10^{-5} h^2 \Omega (\theta/g')^{-2} & h=-1 \\ 2.4 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \Omega^{1/2} (\theta/g')^{-3/2} & h=0 \\ 4.2 \cdot 10^{-5} h (\theta/g')^{-1} & h=1 \end{cases}$$

Su scale $L \ll L_S$ osserviamo attualmente grandi di densità

e ci aspetteremmo che anche il $\frac{\Delta T}{T}$ sia grande.

Ciò non si verifica per la seguente ragione: se z_2 è il red shift al quale la perturbazione diviene trasparente

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3} \delta_m(z_2) \quad , \text{ ma su scale } L \ll L_S \text{ l'Universo è an-}$$

cora opaco e il $\frac{\Delta T}{T}$ sarà smorzato di un fattore $e^{-\tau(z_2)}$.

Per una perturbazione di massa

$$(2.8) \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho(z_2) L^3(z_2)$$

la condizione di trasparenza

$$(2.9) \quad \tau(z_2) = \sigma_T L(z_2) n_e(z_2) X(z_2) \approx 1$$

dà per z_2 (SZ)

$$(2.10) \quad z_2 \sim \frac{4 \cdot 10^4}{7.5 + \log \left(\frac{M_{SZ}}{M_\odot} \right)}$$

Questo per $M > 10^9 M_\odot$, cioè $z_2 < 1500$ in modo che l'espressione (2.3) per $x(z)$ sia applicabile.

Al momento in cui $M(z_2)$ è diventata trasparente la profondità

ottica dell'Universo può essere scritta come

$$(2.11) \quad \tau \approx 0.4 + (6 \cdot 10^{14} M_{\odot} / M \Omega^{1/2})^{2/3}$$

Il $\frac{\Delta T}{T}$ sarà dato da

$$(2.12) \quad \frac{\Delta T}{T} \sim \frac{1}{3} \delta_M(z_2) \frac{e^{-\tau(z_2)}}{\sqrt{N}}$$

dove $N \sim \frac{L_s}{L}$ è il numero di perturbazioni indipendenti che hanno subito diffusione dopo z_2 .

Questa trattazione sovrasemplificata mostra già che ci si devono aspettare fluttuazioni dello stesso ordine di grandezza dei limiti superiori esistenti.

Calcoli più dettagliati (Silk e Wilson 1980, Peebles e Yu 1970, Press e Vishniac 1980) indicano che i risultati (2.7) sono in realtà una sottostima delle fluttuazioni e mettono in rilievo che la teoria adiabatica, nella sua forma originaria, va incontro a serie difficoltà con l'isotropia del fondo di microonde.

Nel caso delle perturbazioni isoterme si producono fluttuazioni $\frac{\Delta T}{T}$ principalmente a causa dello scattering della radiazione da parte degli elettroni in moto, durante il periodo della ricombinazione.

Queste fluttuazioni sono un fattore 4-5 più piccole che nel caso adiabatico (SZ), e quindi ancora consistenti con i limiti osservati.

§3 - Evoluzione delle perturbazioni (con neutrini)

Se i neutrini hanno una massa diversa da zero il quadro precedentemente presentato deve essere profondamente rivisto.

I neutrini non subiscono collisioni e il gas non ha pressione, tuttavia un ammasso di Jeans neutrino può essere introdotta come per i barioni.

In questo caso la competizione non è tra pressione ed energia gravitazionale, ma tra energia cinetica dei neutrini (che gli viene dai moti termici) ed energia gravitazionale.

Sostituendo nella massa di Jeans $\zeta_s \rightarrow \langle v^2 \rangle / 3 \quad M_{J\nu}$ può essere calcolata come per i barioni. La condizione $M > M_{J\nu}$

significa ancora che nella perturbazione domina ancora l'energia gravitazionale e questa collassa.

Una importante differenza rispetto al caso barionico è che per $M < M_{J\nu}$ le perturbazioni neutriniche subiscono uno smorzamento .

Questo perchè il libero cammino medio dei neutrini è grande, cosicché l'energia sfugge dalla perturbazione, a meno che i neutrini non siano intrappolati gravitazionalmente ($M > M_{J\nu}$). Questo punto verrà chiarito in seguito con un esempio (vedi §4). I neutrini diventano non relativistici ad un red shift $z_{NR} \sim z_{eq}$ (IV-(1.3), (1.9)), cioè alla stessa epoca a cui l'Universo entra nella fase di dominanza della materia.

Per $z > z_{NR}$ $(c^2)_{\nu} \approx \frac{c^2}{3}$ $\lambda_J \approx \left(\frac{\pi c^2 s}{G \rho} \right)^{1/2} \sim (1+z)^{-2}$ e

$$(3.1a) \quad M_{J\nu}(z > z_{NR}) \sim M_H(RD) \sim 10^{16} M_{\odot} \left(\frac{1+z_{eq}}{1+z} \right)^{-2}$$

A $z < z_{NR}$ i neutrini sono non relativistici, con $\sqrt{v^2} \sim \frac{kT_{\nu}}{m_{\nu}c}$ $\lambda_J(z < z_{NR}) = \frac{kT_{\nu}}{m_{\nu}c} \left(\frac{\pi}{G h_{\nu} m_{\nu}} \right)^{1/2} \sim (1+z)^{-1/2}$; abbiamo

$$(3.1b) \quad M_{J\nu}(z < z_{NR}) \approx 10^{15} M_{\odot} \left(\frac{1+z}{1+z_{eq}} \right)^{3/2} \theta^{3/2} \left[\frac{30 \text{ eV}}{m_{\nu} c^2} \right]^{7/2}$$

Le perturbazioni neutriniche con $M < M_{J\nu}$ sono smorzate.

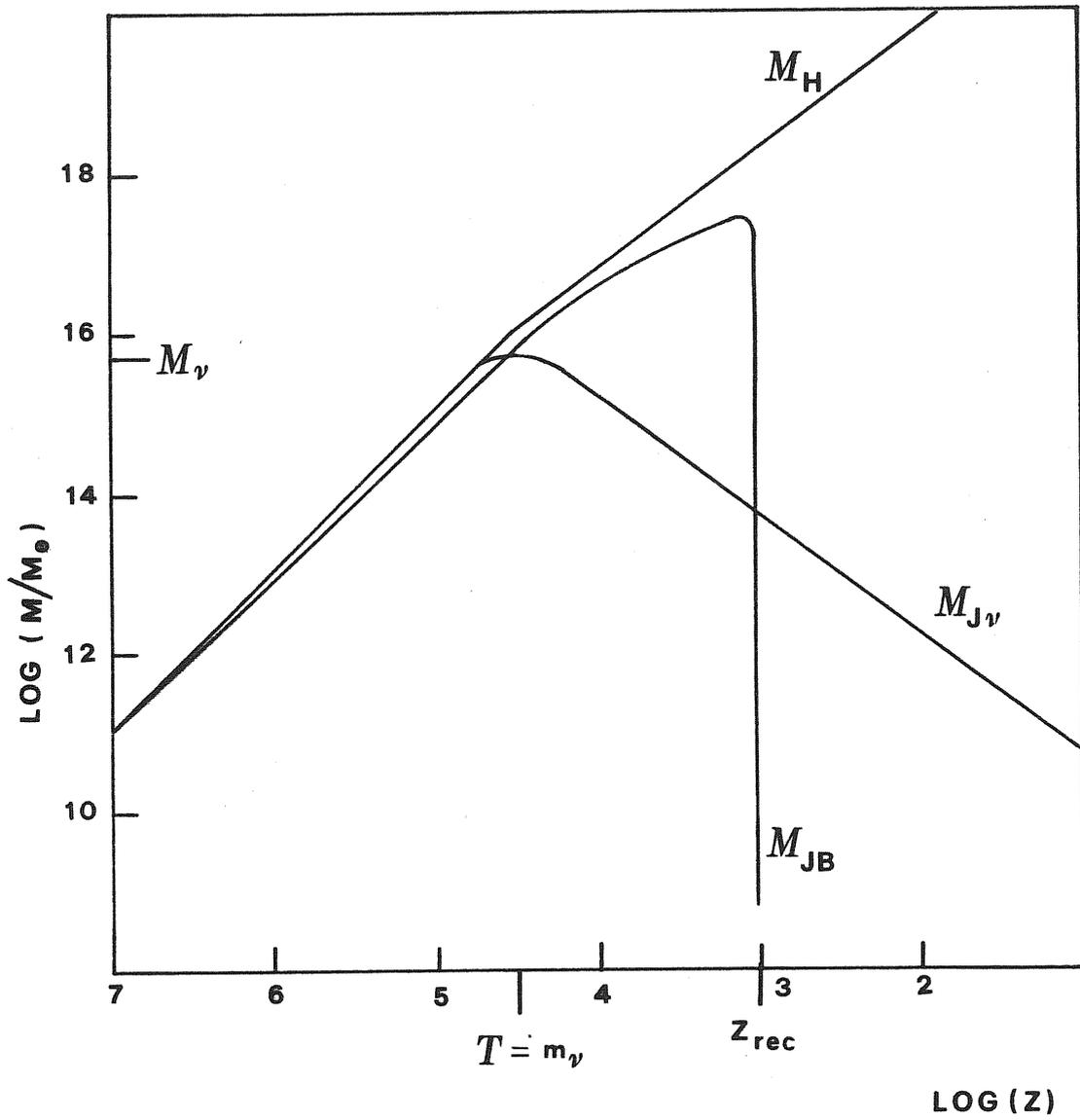
Le eq. (3.1a), (3.1b) mostrano allora che le sole perturbazioni che sopravvivono al passaggio UR \rightarrow NR sono quelle con

$$M > M_{J\nu} \Big|_{MAX} = M_{J\nu}(UR \rightarrow NR) \sim 10^{15} M_{\odot} \quad (\text{Bond et al. 1980, Doroshkevich et al. 1980a}),$$

cioè una scala di ammassi, super-ammassi.

In Fig.5 è mostrato l'andamento di $M_{J\nu}$ in funzione del

FIG 5



red shift, insieme alla massa di Jeans e quella d'orizzonte.

Esaminiamo il comportamento delle perturbazioni neutrini + barioni a varie epoche (Wasserman 1981, Doroshkevich et al. 1980 b).

Consideriamo $z < z_{NR}$ e applichiamo la teoria linearizzata (Newtoniana) $\delta_B, \delta_\nu \ll 1$.

$z_T < z < z_{NR}$ (pre-ricombinazione)

- Perturbazioni adiabatiche -

Consideriamo lunghezze d'onda $\lambda > \lambda_{J\nu}$, $\lambda_B < \lambda_{JB}$.

L'equazione per la perturbazione è

$$(3.2) \quad L \delta_\alpha = 4\pi G \rho \left[\frac{\rho_B}{\rho} \delta_B + \frac{\rho_\nu}{\rho} \delta_\nu \right]$$

dove $L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{z\dot{R}}{R} \frac{d}{dt}$, $\alpha = \nu, B$ e $\delta\rho = \delta\rho_T =$

$$= \rho_B \delta_B + \rho_\nu \delta_\nu = \rho \left[\frac{\rho_B}{\rho} \delta_B + \frac{\rho_\nu}{\rho} \delta_\nu \right]$$

Per $\alpha = B$ ad L va aggiunto il termine di pressione.

Facciamo l'ipotesi $\frac{\rho_\nu}{\rho_B} \gg 1$.

Per $\alpha = \nu$ possiamo trascurare δ_B che è un modo, approssimativamente, costante rispetto a δ_ν (assumendo che le ampiezze iniziali a $z = z_{NR}$ fossero circa uguali).

L'equazione per δ_ν è allora

$$(3.3) \quad \ddot{\delta}_\nu + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_\nu - \frac{2}{3t^2} \delta_\nu = 0$$

Il modo crescente è $\delta_\nu^+ = A \left(\frac{t}{t_{eq}} \right)^{2/3}$. Trascuriamo l'altra soluzione ($\delta_\nu^- \sim t^{-1}$) nell'equazione per δ_B , cioè $\delta_\nu \sim \delta_\nu^+$;

nell'ipotesi $\frac{\Omega_B}{\Omega_\nu} \ll 1$ l'equazione per δ_B è allora, tenendo conto del termine di pressione,

$$(3.4) \quad \ddot{\delta}_B + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_B + \left[\frac{c_s^2}{3} k_{eq}^2 \left(\frac{t_{eq}}{t} \right)^{4/3} \right] \delta_B - \frac{2}{3} A \left(\frac{t}{t_{eq}} \right)^{2/3} = 0$$

che ha per soluzione

$$(3.5) \quad \delta_B = \frac{2A}{c_s^2 k_{eq}^2 t_{eq}^2} + t^{-1/3} \left\{ C_1 \sin a t^{1/3} + C_2 \cos a t^{1/3} \right\}$$

$$a = \sqrt{3} c k_{eq} t_{eq}^{-1/3}$$

C_1, C_2 sono valutate dalle condizioni iniziali a $t = t_{eq}$.

Come si vede vi è un modo oscillante che decade gradualmente ed uno costante.

-. Perturbazioni isoterme -

Per $z \gg z_{NR}$ le perturbazioni isoterme prendono la forma di perturbazioni di materia in un fondo omogeneo di radiazione

(neutrini + fotoni), $\delta_B \neq 0$, $\delta_\nu = \delta_\gamma = 0$.

Per $z \ll z_{NR}$ consideriamo scale $\lambda_\nu > \lambda_{J\nu}$, $\lambda_B \ll \lambda_J$

Le condizioni iniziali sono $\delta_\nu(z_{NR}) = \dot{\delta}_\nu(z_{NR}) = 0$,

non possiamo quindi trascurare δ_B (= cost) nell'equazio-

ne per δ_γ , come abbiamo fatto per le fluttuazioni adiabatiche. Per δ_γ abbiamo

$$(3.6) \quad \ddot{\delta}_\gamma + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_\gamma - \frac{2}{3t^2} \delta_\gamma = \frac{\Omega_B}{\Omega_\gamma} \frac{2}{3t^2} \delta_B$$

la cui soluzione è

$$(3.7) \quad \delta_\gamma = \frac{\Omega_B}{\Omega_\gamma} \delta_B \left[-1 + \frac{3}{5} \left(\frac{t}{t_{eq}} \right)^{2/3} + \frac{2}{5} \left(\frac{t}{t_{eq}} \right)^{-1} \right]$$

questo per scale $\lambda_\gamma > \lambda_{J\gamma}$. Su scale $\lambda_\gamma < \lambda_{J\gamma}$ $\delta_\gamma = 0$.

$z < z_r$ (post-ricombinazione)

- Perturbazioni adiabatiche -

Per l'epoca post-ricombinazione consideriamo scale $\lambda > \lambda_{J\gamma} > \lambda_{JB}$.

L'equazione fondamentale è la (3.2).

Una soluzione è quella omogenea

$$(3.8) \quad \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\dot{R}}{R} \frac{d}{dt} - 4\pi G \rho \right] f_{\pm} = 0 \quad f_+ \sim t^{2/3}, f_- \sim t^{-1}$$

Se $\delta_B \sim f_+$ anche $\delta_\gamma \sim f_+$, con la stessa costante

davanti.

Sia t_r l'istante a cui specifichiamo le condizioni iniziali,

la soluzione omogenea del sistema è allora

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} \delta_B \\ \delta_\gamma \end{bmatrix} = C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (t/t_r)^{2/3} + C_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (t/t_r)^{-1}$$

Un'altra soluzione è $\delta_\alpha = \text{cost}$, le costanti sono specificate dal sistema (3.2), abbiamo

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} \delta_B \\ \delta_r \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} -\omega_r/\omega_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

Infine vi è il modo $\psi(t) \sim \int dt/\rho^2 \sim t^{-1/3}$ che dà un termine $c_\psi \begin{pmatrix} -\omega_r/\omega_B \\ 1 \end{pmatrix} (t/t_r)^{-1/3}$

La soluzione completa è finalmente

$$(3.11) \quad \begin{bmatrix} \delta_B \\ \delta_r \end{bmatrix} = c_+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (t/t_r)^{2/3} + c_- \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (t/t_r)^{-1} + \\ + c_0 \begin{bmatrix} -\omega_r/\omega_B \\ 1 \end{bmatrix} + c_\psi \begin{bmatrix} -\omega_r/\omega_B \\ 1 \end{bmatrix} (t/t_r)^{-1/3}$$

Le costanti C sono specificate da δ_B , $\dot{\delta}_B$, δ_r , $\dot{\delta}_r$, a t_r . A t_r abbiamo

$$(3.12) \quad \begin{cases} \delta_B^r = c_+ + c_- - \frac{\omega_r}{\omega_B} c_0 - \frac{\omega_r}{\omega_B} c_\psi \\ \delta_r^r = c_+ + c_- + c_0 + c_\psi \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \begin{cases} t_r \dot{\delta}_B^r = \frac{2}{3} C_+ - C_- + \frac{1}{3} C_\psi \frac{\Omega_r}{\Omega_B} \\ t_r \dot{\delta}_r^r = \frac{2}{3} C_+ - C_- - \frac{1}{3} C_\psi \end{cases}$$

La soluzione del sistema fornisce

$$(3.14) \quad \begin{cases} C_+ = \frac{3}{5} \left[\frac{\Omega_B}{\Omega} (\delta_B^r + t_r \dot{\delta}_B^r) + \frac{\Omega_r}{\Omega} (\delta_r^r + t_r \dot{\delta}_r^r) \right] \\ C_- = \frac{2}{5} \left[\frac{\Omega_B}{\Omega} (\delta_B^r - \frac{3}{2} t_r \dot{\delta}_B^r) + \frac{\Omega_r}{\Omega} (\delta_r^r - \frac{3}{2} t_r \dot{\delta}_r^r) \right] \\ C_0 = \frac{\Omega_B}{\Omega} \left[(\delta_r^r + 3 t_r \dot{\delta}_r^r) - (\delta_B^r + 3 t_r \dot{\delta}_B^r) \right] \\ C_\psi = 3 t_r \frac{\Omega_B}{\Omega} \left[\dot{\delta}_B^r - \dot{\delta}_r^r \right] \end{cases}$$

Nel seguire l'evoluzione delle perturbazioni scegliamo

$\delta_r = A \left(\frac{t}{t_{NR}} \right)^{2/3}$, che è il modo più importante delle perturbazioni neutriniche presenti a $t = t_r$.

Poniamo inoltre $\delta_B^r = \dot{\delta}_B^r = 0$. Le costanti sono

$$(3.15) \quad \begin{cases} C_+ = \frac{\Omega_r}{\Omega} \delta_r(t_r) \\ C_- = 0 \\ C_0 = 3 \frac{\Omega_B}{\Omega} \delta_r(t_r) \\ C_\psi = -2 \frac{\Omega_B}{\Omega} \delta_r(t_r) \end{cases}$$

Per δ_r ($\Omega_r/\Omega_B \gg 1$) abbiamo $\delta_r \approx A \left(\frac{t}{t_{NR}} \right)^{2/3}$

$$(3.16) \quad \delta_B \approx \delta_r \left[1 - 3 \left(\frac{t_r}{t} \right)^{2/3} + 2 \left(\frac{t_r}{t} \right) \right]$$

A $z \sim 50$ è già $\delta_B \sim \delta_\nu$. Questo mostra come la formazione delle galassie sia favorita in un quadro neutrinico. Anche se $\delta_B = 0$ alla ricombinazione, le inhomogeneità neutriniche presenti portano rapidamente δ_B al loro livello.

- Perturbazioni isoterme -

Supponiamo $\lambda < \lambda_{J\nu}$. In tal caso $\delta_\nu = 0$, per δ_B

si ha

$$(3.17) \quad \ddot{\delta}_B + \frac{4}{3t} \dot{\delta}_B - \frac{2}{3t^2} \frac{\Omega_B}{\Omega_\nu} \frac{\delta_B}{t^2} = 0$$

La soluzione sarà $\delta_B = t^{\alpha_\pm}$, con $\alpha_- = -\frac{1}{3}$ e

$$\alpha_+ = \frac{1}{6} \left[\sqrt{1 + 24 \frac{\Omega_B}{\Omega_\nu}} - 1 \right] \approx 2 \frac{\Omega_B}{\Omega_\nu} \ll 1.$$

Nel caso isoterma la crescita delle perturbazioni barioniche

è completamente trascurabile per $\lambda < \lambda_{J\nu}$.

Se $\lambda > \lambda_{J\nu}$, $\delta_\nu \sim t^{2/3}$ e le perturbazioni barioniche si portano rapidamente al livello di quelle neutriniche.

Fattori di crescita

Il fattore di crescita delle perturbazioni neutriniche da

ad oggi è stato dell'ordine di (nel caso adiabatico)

$$(3.18) \quad \left(\frac{\delta_\nu^0}{\delta_\nu^{NR}} \right) \approx z_{NR} \approx 10^4$$

Le perturbazioni barioniche sono rimaste costanti fino a

$z = z_{\nu}$, dopo di che si sono portate al livello di quelle neutriniche. Quindi il loro fattore di crescita è stato

$$(3.19) \quad \left(\frac{\delta_B^0}{\delta_B^r} \right) \approx z_{NR}$$

dalla ricombinazione ad oggi. Rispetto al caso $m_{\nu} = 0$ le

ampiezze δ_B alla ricombinazione sono più piccole di un fattore che è circa $\frac{z_{NR}}{z_{\nu}} \sim 50$. Il $\frac{\Delta T}{T}$ previsto scende quindi dello stesso fattore, rientrando nei limiti sperimentali.

Per le perturbazioni isoterme $\delta_{\nu}(z_{NR}) = 0$, da z_{NR} a z_{ν} δ_{ν} è cresciuto di un fattore, è usata l'eq. (3.7),

$$(3.20) \quad \delta_{\nu}^r \approx \frac{1}{6.5} \delta_B^{(15)}(z_{\nu})$$

Il fattore di crescita di $\delta_{\nu}^{(AD)}$ rispetto a $\delta_{\nu}^{(15)}$

è oggi

$$(3.21) \quad \left[\frac{\delta_{\nu}^{(AD)}}{\delta_{\nu}^{(15)}} \right]_0 \approx \frac{z_{NR}}{z_{\nu}} 6.5^7 \approx 250$$

Le perturbazioni isoterme sono sfavorite in questo quadro,

sostanzialmente a z_{NR} è $\delta_{\nu}^{(15)}(z_{NR}) = 0$, dunque sono

le perturbazioni di materia che inizialmente devono indurre inomogeneità nel fondo neutrinico.

Affinchè oggetti come ammassi di galassie si sviluppino a un

red shift $z \sim 5$, l'ampiezza della perturbazione neutrini-
ca alla ricombinazione doveva essere $\delta_{\nu}^T > \frac{1+\delta}{z}$, dall'equa-
zione (3.20), questa condizione implica per δ_B^T un limi-
te $\delta_B^T > \frac{1}{40}$.

Nel caso isoterma l'ampiezza alla ricombinazione è più ele-
vata che nel caso senza neutrini, i $\frac{\Delta T}{T}$ sarebbero grandi
($\approx 10^{-4}$) e forse al di sopra dei limiti sperimenta-
li.

§4 - Decadimento delle perturbazioni neutriniche

Diamo qui un esempio esplicito del processo di smorzamento
per perturbazioni neutriniche con $M < M_{J\nu}$ (Wasserman 1981).

Sia $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ la funzione di distribuzione dei neutrini,
dopo il disaccoppiamento.

Se f_0 è la densità nello spazio delle fasi per il fluido
imperturbato, possiamo scrivere

$$(4.1) \quad f(\vec{x}, \vec{p}, t) = f_0 [1 + \varepsilon(\vec{x}, \vec{p}, t)]$$

$\varepsilon(\vec{x}, \vec{p}, t)$ rappresenta l'effetto delle perturbazioni; $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$

è normalizzata alla densità numerica

$$(4.2) \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{x}, \vec{p}, t) = n_{\nu}(\vec{x}, t)$$

Per perturbazioni lineari $\varepsilon \ll 1$.

La f_0 è quella di Fermi-Dirac

$$(4.3) \quad f_0 = \frac{1}{e^{pc/vT(t)} + 1} \quad \frac{p(t)}{T(t)} = \frac{p(t) R(t)}{T_0 R_0}$$

dove T_0 e R_0 si riferiscono al disaccoppiamento.

La trasformata di Fourier di S_γ sarà data da

$$(4.4) \quad S_\gamma(\vec{k}, t) = \frac{\int d^3p f_0 \varepsilon(\vec{k}, \vec{p}, t)}{\int d^3p f_0}$$

Assumiamo $\varepsilon(\vec{x}, \vec{p}, t) = \varepsilon(\vec{x}_0, \frac{\vec{p} R(t)}{R_0}, t_0)$, che rappresenta matematicamente l'assenza di collisioni a $t > t_0$.

Avremo per

$$(4.5) \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{p}' \frac{dt'}{R'} \frac{1}{E(p')} \quad E(p') = E' = E\left(\frac{p R}{R'}\right)$$

Il fattore R' tiene conto dell'espansione dell'Universo

La $\varepsilon(\vec{k}, \vec{p}, t)$ è data dalla trasformata di Fourier

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon(\vec{k}, \vec{p}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varepsilon(\vec{x}, \vec{p}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varepsilon\left(\vec{x} - \int_{t_0}^t \vec{p}' \frac{R}{R'} \frac{1}{E'} \frac{dt'}{R'}, \vec{p}' \frac{R}{R_0}, t_0\right) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x = \\ &= \varepsilon\left(\vec{k}, \vec{p}' \frac{R}{R_0}, t_0\right) e^{-i\vec{k} \cdot \int_{t_0}^t \frac{dt'}{R'} \vec{p}' \frac{R}{R'} \frac{1}{E'}} \end{aligned}$$

Assumiamo per semplicità $\varepsilon(\vec{k}, \vec{p}' R/R_0, t_0) = \varepsilon(\vec{k}, t_0)$

indipendente da \vec{p}' a t_0 . Questa assunzione per

le condizioni iniziali è sufficiente a illustrare il decadimento per

$\lambda < \lambda_{J\gamma}$.

Per valutare l'integrale effettuiamo la sostituzione $t \rightarrow R$

$$(4.7) \quad \left(\Gamma \equiv \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{R'} |\vec{p}| \frac{R}{R'} \frac{1}{E'} = \int_{R_0}^R \frac{dR'}{R'^2 \Gamma'} |\vec{p}'| \frac{R}{R'} \frac{1}{\sqrt{m_\nu^2 + \frac{p'^2 R^2}{R'^2}}}$$

$$= \int_{R_0}^R \frac{dR'}{R'^2 \Gamma'} \frac{1}{\left[1 + \frac{m_\nu^2 R'^2}{p'^2 R^2} \right]^{1/2}}$$

Nell'era dominata dalla radiazione $R'^2 \Gamma' = \text{cost}$, $\eta = \frac{m_\nu R'}{pR}$,

si ha

$$(4.8) \quad \int_{R_0}^R \frac{dR'}{R'^2 \Gamma'} \frac{1}{\left[1 + \frac{m_\nu^2 R'^2}{p^2 R^2} \right]^{1/2}} = \frac{1}{R'^2 \Gamma'} \frac{pR}{m_\nu} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{[1 + \eta^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{R'^2 \Gamma'} \gamma \frac{T_D R_D}{m_\nu} \left[\text{sh}^{-1} \left(\frac{m_\nu R}{\gamma T_D R_D} \right) - \text{sh}^{-1} \left(\frac{m_\nu R_0}{\gamma T_D R_D} \right) \right] \quad (RD)$$

con $\gamma = \frac{pR}{T_D R_D}$. Chiamiamo questo integrale $z \phi / |\vec{k}|$.

Dalle equazioni precedenti abbiamo l'espressione per $\delta_\nu(\vec{k}, t)$

$$(\cos \theta = \cos(\hat{k}, \hat{p}))$$

$$(4.9) \quad \delta_\nu(\vec{k}, t) = \frac{\int d^3 p f_0 \varepsilon(\vec{k}, t_0) e^{-i2\phi \cos \theta}}{\int d^3 p f_0} =$$

$$= \frac{\varepsilon(\vec{k}, t_0)}{3 \zeta(3)} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{e^y + 1} \sin \theta e^{-2i\phi \cos \theta} d\theta =$$

$$= \frac{\varepsilon(\vec{k}, t_0)}{3 \zeta(3)} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{e^y + 1} \frac{\sin 2\phi}{\phi} dy = \delta_\nu(\vec{k}, t)$$

con $\phi = \phi(y, t)$. Nel caso UR $m_\nu/p_\nu \ll 1$ e

$$(4.10) \quad \phi \approx \frac{k R_D T_D t_0 y}{m_\nu R_0^2} \left[\frac{m_\nu R}{R_D T_D y} - \frac{m_\nu R_0}{R_D T_D y} \right] \approx \\ = \frac{k t_0}{R_0^2} (R - R_0)$$

$\delta_\nu(\vec{k}, t)$ è allora (ϕ non dipende da y)

$$(4.11) \quad \delta_\nu(\vec{k}, t) \approx \varepsilon(\vec{k}, t_0) \sin \left\{ \frac{2k t_0}{R_0^2} (R - R_0) \right\} \sqrt{\left[\frac{2k t_0}{R_0^2} (R - R_0) \right]}$$

Il decadimento delle perturbazioni neutriniche con $H < H_{J\nu}$,

nell'era UR, procede con $\delta_\nu \sim R^{-1}(t)$, a parte la componente sinusoidale.

Nell'era MD $R \sim t^{2/3}$ e l'integrale (4.8) diventa

$$(4.12) \quad \int_{R_0}^R \frac{dR'}{R'^2 \Gamma'} \frac{1}{\left[1 + \frac{m_\nu^2 R'^2}{\rho^2 R^2} \right]^{1/2}} \approx \int_{R_0}^R \frac{dR'}{R'^2 \Gamma'} \frac{\rho R}{m_\nu R'} = \frac{3}{B^{3/2}} \frac{\rho R}{m_\nu} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \left[1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}} \right]$$

con $R(t) = B t^{2/3}$. Abbiamo per ϕ

$$(4.13) \quad \phi = \frac{3}{2} \frac{y T_D R_D k}{m_\nu} \frac{1}{\sqrt{R_0}} \frac{1}{B^{3/2}} \left[1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}} \right] = \\ = \frac{3}{2} \frac{y T_D R_D k}{m_\nu} \frac{t_0}{R_0^2} \left[1 - \left(\frac{1+z}{1+z_0} \right)^{2/2} \right] = \phi(y, t) \quad \text{MD}$$

L'integrale su δ_ν è più complicato dato che ϕ dipende

da y . Comunque la dipendenza più importante è quella da z .

Per $\delta_\nu(\vec{k}, t)$ avremo

$$(4.14) \quad \delta_\nu(\vec{k}, t) \sim \left[1 - \left(\frac{1+z}{1+z_0} \right)^{1/2} \right]$$

Per $\lambda < \lambda_{J\nu}$ il decadimento di δ_ν è meno rapido nella fase MD, δ_ν tende asintoticamente ad un valore costante.

(N.B.: questo risultato non cambia la discussione del §3,

quando abbiamo assunto $\delta_\nu = 0$ per scale $\lambda < \lambda_{J\nu}$.

Rispetto ai modi crescenti $\delta_\nu(\lambda < \lambda_{J\nu})$ è comunque trascurabile).

§5 - Ammassi e neutrini massivi

Dalla eq.IV-(1.10) la velocità attuale dei neutrini è dell'ordine di 50 Kmsec^{-1} , più piccola della dispersione di velocità per galassie o ammassi di galassie,

$$(5.1) \quad \frac{GM(<R)}{R} = 3\sigma^2 \approx \left[(200-10^3) \text{ km sec}^{-1} \right]^2 \approx \sigma_\nu^2$$

dove σ è la dispersione di velocità unidimensionale.

I neutrini parteciperanno quindi al collasso gravitazionale dell'ammasso.

Tuttavia questo non implica che essi siano automaticamente in grado di tener conto della massa oscura.

Tremaine e Gunn (TG, 1979) hanno mostrato che considerazioni sulla distribuzione nello spazio delle fasi pongono limi-

ti stringenti alla massa dei neutrini.

Essi assumono una distribuzione isoterma per il sistema legato formato dai neutrini.

Questo è giustificato dalla teoria del rilassamento violento (Lynden-Bell 1967): se le orbite stellari sono controllate principalmente dal campo gravitazionale dell'intero sistema, e se il campo medio fluttua in modo sufficientemente rapido con il tempo, come può avvenire durante le fasi iniziali, allora le energie delle singole stelle non saranno conservate; la ridistribuzione può simulare un processo di rilassamento e produce un approccio alla distribuzione di equilibrio più probabile.

Il risultato finale sarà una sfera isoterma, con una distribuzione Maxwelliana delle velocità.

La funzione di distribuzione dei neutrini sarà allora una Maxwelliana

$$(5.2) \quad \frac{dn}{d^3p} = \rho m^{-4} (2\pi\sigma^2)^{-3/2} e^{-V^2/2\sigma^2}$$

dove $\sigma^2 = kT/m$. Il massimo di densità nello spazio delle fasi è

$$(5.3) \quad \rho \approx m^{-4} (2\pi\sigma^2)^{-3/2}$$

Quando il fondo di neutrini era omogeneo il massimo della densità nello spazio delle fasi era $2y h^{-3}$, dal principio di Pauli.

Allora la condizione per avere collasso diventa

$$(5.4) \quad \frac{2y}{h^3} > \rho \approx m^{-4} (2\pi\sigma^2)^{-3/2}$$

Il raggio del sistema è definito da $\frac{GM}{R} = 3\sigma^2$, ρ

è dato da

$$(5.5) \quad \bar{\rho} = \frac{9\sigma^2}{4\pi G} \frac{1}{R^2} = 10^{-28} \left(\frac{\sigma_{100}}{R_{Mpc}} \right)^2 \text{ gr cm}^{-3}$$

dove $\sigma_{100} = \sigma / 100 \text{ km sec}^{-1}$. La condizione (5.4) si

traduce in

$$(5.6) \quad m_\nu^4 \gtrsim (100 \text{ eV})^4 \left(\frac{R}{\sigma_{100}} \right)^{-2} R_{<pc}^{-2} \quad (g_\nu = 2)$$

A seconda del valore di m_ν i neutrini domineranno la

massa su varie scale:

	σ_{100}	$R_{<pc}$	$m_\nu \gtrsim$
Ammassi	10	250	4 eV
Sistemi binari	1	100	12 eV
Aloni galattici	2	20	22 eV

Per $m_\nu \gtrsim 22 \text{ eV}$ i neutrini collassano e dominano la massa su piccole scale.

Questo però implicherebbe valori di Ω_V notevolmente elevati (eq.IV-(1.13)) e vicino ai limiti superiori discussi nel cap.III .

Una recente trattazione,più dettagliata, è stata fatta sulla stessa linea da Rephaeli (1982).

Ne diamo solo i risultati principali.

La funzione di distribuzione all'equilibrio è

$$(5.7) \quad f = \eta / (e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1)$$

dove $\epsilon = \frac{v^2}{2} - \psi$, ψ è il potenziale gravitazionale,

$\beta = \frac{3}{\sigma^2}$, η è il massimo di densità nello spazio

delle fasi. Per un collasso senza collisioni η è una

quantità conservata. La f è normalizzata in modo che

$$(5.8) \quad \int f d^3r d^3v = M$$

Il potenziale chimico μ è tale che per $-\beta\mu \gg 1$ il

sistema è non degenero ed f prende la forma Maxwelliana.

Supponiamo adesso di avere due gas in interazione gravitazio-

nale, che non subiscano collisioni. Questo scenario è realisti-

co non solo per le galassie ellittiche e gli 'ammassi', ma

anche per l'alone oscuro delle spirali.

Il risultato finale sarà una distribuzione f che dipenderà dalle distribuzioni iniziali dei gas.

Se η_r ed η_s sono le densità iniziali dei gas, avremo

$$(5.9) \quad f(\text{finale}) = \frac{\eta_r e^{-\beta_r(\epsilon - \mu_r)} + \eta_s e^{-\beta_s(\epsilon - \mu_s)}}{1 + e^{-\beta_r(\epsilon - \mu_r)} + e^{-\beta_s(\epsilon - \mu_s)}}$$

con $\beta_{r,s} = \beta \frac{\eta_{r,s}}{\bar{\eta}}$ e $\bar{\eta} = (\eta_r M_r + \eta_s M_s) / M$

In generale sarà $\beta_r \neq \beta_s$; tuttavia, nei sistemi che consideriamo (galassie, ammassi) il potenziale gravitazionale medio $\langle \psi \rangle$ è una funzione debolmente variabile del raggio; dal teorema del viriale $\langle v^2 \rangle \sim \langle \psi \rangle$, cosicché

$$\beta_r \sim \beta_s \quad \circ \quad \eta_r \sim \eta_s$$

Poiché η_s , η_G sono quantità conservate esse possono calcolarsi al momento della formazione di stelle in una galassia (η_s) o di galassie in un ammasso (η_G).

Per la normalizzazione scelta

$$(5.10) \quad \eta = \rho / c^3$$

dove c è la velocità nel suono del mezzo, espressa da

$$(5.11) \quad c^3 \approx \left(\frac{3M}{4\pi} \right) \rho^{1/2} \left(\frac{G}{\pi} \right)^{3/2}$$

Per la formazione di galassie in un ammasso abbiamo

$$(5.12) \quad \gamma_G \approx \left(\frac{4\pi}{3M_G} \right) \rho_G^{1/2} \left(\frac{\pi}{G} \right)^{3/2}$$

Fatte le opportune conversioni, $\gamma_\nu = \frac{g_\nu m_\nu^4}{h^3}$, i limiti inferiori per m_ν sono circa quelli di TG ($m_\nu \gtrsim 10\text{eV}$).

Una importante differenza rispetto a TG Rephaeli la trova per γ_S , cioè per il collasso nella galassia.

Al momento della formazione di stelle nella galassia la densità di materia non era uniforme, è più appropriato, per determinare γ_S , usare una densità locale.

Se $\bar{\rho}$ è la densità media nella regione dove si formano le stelle, abbiamo

$$(5.13) \quad \gamma_S \approx 7 \cdot 10^{-40} \left(\frac{m_S}{1M_\odot} \right)^{-1} \left(\bar{\rho}/10^{-23} \right) \left(c^3/10^{-10} \right)^{-1/2} \text{gr cm}^{-6} \text{sec}^3$$

In questo caso neutrini e stelle avranno dispersioni di velocità comparabili per

$$(5.14) \quad m_\nu \approx 2 \cdot 10^3 \text{gr}^{-1/4} \left(\frac{m_S}{1M_\odot} \right)^{-1/4} \left(\bar{\rho}/10^{-23} \right)^{1/4} \left(c^3/10^{-10} \right)^{-1/8} \text{eV}$$

Ciò porterebbe a concludere che i neutrini non possono rendere conto degli aloni oscuri delle galassie.

CONCLUSIONI

Dalla discussione svolta nei precedenti capitoli possiamo trarre alcune conclusioni. Queste sono

i) L'evidenza sperimentale per l'esistenza di una massa oscura è molto forte; questa domina sulla massa visibile su ogni scala, dalle galassie fino agli ammassi.

ii) Le stime della densità media dell'Universo, o equivalentemente del parametro cosmologico Ω , danno $\Omega \approx 0.1 - 0.5$.

Per Ω non si può dare un valore preciso, ma diversi metodi producono concordemente valori nell'intervallo $10^{-1} - 1$.

iii) La natura della massa oscura è ancora un problema.

Le abbondanze attuali di elio e deuterio e l'uso della teoria cosmologica della nucleosintesi (nel modello standard)

suggeriscono $\Omega_N < \Omega$. Delle incertezze nella stima di Ω_N

abbiamo già parlato nel cap.III. E' ancora possibile

$$\Omega_N \approx \Omega \quad (\text{Pop.III ?})$$

iv) Se $\Omega_N < \Omega$ i neutrini con $m_\nu \neq 0$ si propongono come i primi candidati a spiegare la massa oscura.

Infatti dato $\frac{h_\nu}{h_B} \approx \frac{h_\nu}{h_B} \approx 10^{9 \pm 1}$, i neutrini

possono dominare la massa dell'Universo anche se hanno masse molto piccole: $m_\nu \gtrsim 1.4\text{eV}$.

v) Ci sono ragioni teoriche che rendono attraente l'ipotesi di neutrini con $m_\nu \neq 0$. Le teorie di grande unificazione, GUT, (Fry, Olive e Turner 1980 e referenze citate) prevedono interazioni che violano il numero barionico e sarebbero in grado di spiegare il rapporto osservato n_b/n_γ .

Alcune di esse suggeriscono una $m_\nu \neq 0$ (Witten 1980) inoltre il valore previsto $\frac{Kn_b}{s}$ è una costante che dipende solo dai parametri microfisici in gioco, suggerendo che le fluttuazioni primordiali dovevano essere di tipo adiabatico (Weinberg 1980, Press 1980).

Le fluttuazioni adiabatiche, in presenza di neutrini massivi, eliminano il problema del $\frac{\Delta T}{T}$ alla ricombinazione e forniscono inoltre una spiegazione naturale della presenza di strutture su grandi scale ($M_{JY(\text{MAX})} \approx 10^{15} M_\odot$).

vi) Non mancano i problemi: per spiegare la massa oscura su scale galattiche $\gtrsim 20 \text{ Kpc}$, occorrono masse neutriniche relativamente elevate, che a loro volta implicherebbero una den-

sità di materia superiore a quella ammissibile sulla base di stime dirette di Ω , t_0 .

Inoltre non è chiaro se perturbazioni di questo tipo possano produrre la funzione di covarianza osservata.

Per finire accenniamo ad alcune soluzioni al problema della massa mancante, alternative all'ipotesi $m_r \neq 0$.

Consideriamo due casi $\Omega_M \approx \Omega$ (caso A) o ancora $\Omega_M < \Omega$ (caso B).

Caso A

Stelle con massa $M \approx 0.1 M_\odot$ sono da escludersi in quanto sarebbero visibili.

Stelle degeneri con masse $M \approx 0.1 M_\odot$ (di tipo "Giove") dovrebbero essere visibili nell'IR.

Resti di stelle (nane bianche, stelle di neutroni, buchi neri) sono probabilmente da escludersi: alla loro formazione immetterebbero grandi quantità di gas chimicamente evoluto, che non si osserva.

Inoltre questi oggetti tendono ad essere sorgenti X apprezzabili e quindi facilmente rivelabili.

Sono pure da escludersi oggetti formati principalmente da elementi pesanti (rocce, comete) in quanto questi elementi devono essere in ogni caso relativamente poco abbondanti rispetto all'idrogeno.

L'ipotesi di idrogeno neutro per la massa oscura richiede un fondo a 21 cm troppo elevato; la densità richiesta per unità di area è circa $\sigma \sim 10^{22} \text{ cm}^{-2}$, 100 volte più grande dei limiti osservati (Kerr et al. 1965)

L'idrogeno ionizzato comporterebbe, dall'emissione X osservata (Field 1972), una densità che è circa 100 volte quella misurata.

Caso B

Fotini (Sciama 1982), gravitini (Bond et al. 1982) potrebbero essere la soluzione al problema della massa mancante.

Queste particelle potrebbero essersi disaccoppiate molto prima dei neutrini ed essere quindi molto meno numerose.

In tal caso sono ammissibili anche valori elevati per la massa ($m_{\nu} \gtrsim 100 \text{ eV}$), in grado di spiegare la presenza di massa oscura già per le galassie.

BIBLIOGRAFIA

- Aaronson, M., et al., 1979, Ap. J., 239, 1
- Aaronson, M., et al., 1982, Ap. J., 258, 64
- Aarseth, S. J., 1969, M. N. R. A. S., 144, 537
- Abell, G. O., 1977, Ap. J., 211, 327
- Audouze, J., Tinsley, B. M., 1974, Ap. J., 192, 487
- Bahcall, N., 1974, Ap. J., 187, 439
- Bahcall, N., 1975, Ap. J., 198, 249
- Barrow, J., 1976, M. N. R. A. S., 175, 359
- Bond, J. R., et al., 1980, Phys. Rev. Lett., 45, 1980
- Bond, J. R., et al., 1982, Phys. Rev. Lett., 48, 1636
- Bosma, A., 1981, Astron. J., 86, 1825
- Boughn, S. P., et al., 1981, Ap. J. Lett., 243, L113
- Brandt, J. C., 1960, Ap. J., 131, 293
- Brans, C., Dicke, R. H., 1961, Phys. Rev., 124, 925
- Burnstein, D., et al., 1982, Ap. J., 253, 70
- Carr, B. J., 1980, M. N. R. A. S., 181, 669
- Chincarini, G., Rood, R. J., 1977, Ap. J., 214, 351
- Corey, B. E., Wilkinson, D. T., 1976, Bull. A. S. S., 8, 351

- Demarque, P., Mc Clure, R.D., 1977, "The evolution of galaxies and stellar populations", Yale Univ. Press
- De Vaucoulers, G., 1948, Ann. Astrophys., 11, 247
- De Vaucoulers, G., 1975, "Galaxies and the Universe", Chicago Univ.
- De Vaucoulers, G., 1976, Ap. J., 205, 13
- De Vaucoulers, G., Bollinger, G., 1979, Ap. J., 233, 433
- Doroshkevich, A.G., et al., 1980a, Proc. X Texas Symp.
- Doroshkevich, A.G., 1980b, Sov. Astr. Lett., 6, 252
- Dressler, A., 1978a, Ap. J., 233, 765,
- Dressler, A., 1978b, Ap. J., 226, 55
- Faber, S.M., Jackson, R.E., 1976, Ap. J., 204, 668
- Faber, S.M., et al., 1977, Ap. J., 214, 383
- Faber, S.M., Gallagher, J.S., 1979, A.R.A.A., 17, 135
- Felten, J.E., 1977, Astron. J., 82, 861
- Field, G.B., 1972, A.R.A.A., 10, 227
- Freeman, K.C., 1970, Ap. J., 160, 811
- Fry, J.N., et al., 1980, Phys. Rev. D, 22, 2953
- Geller, M.J., Peebles, P.J., 1973, Ap. J., 184, 329
- Geller, M.J., Davis, M., 1978, Ap. J., 225, 1
- Giacconi, R., et al., 1972, Ap. J., 178, 281

- Goorestein, M.V., Smoot, G.F., 1981, Ap.J., 244, 361
- Gott, J.R., et al., 1974, Ap.J., 194, 543
- Gott, J.R., Rees, M.J., 1975, Astron. Astrophy., 45, 365
- Gunn, J.E., et al., 1978, Ap.J., 223, 1015
- Hoyle, F., Fowler, F.A., 1973, Nature, 241, 384
- Iben, I. Jr., 1974, A.R.A.A., 12, 215
- Iben, I. Jr., Rood, R.J., 1970, Ap.J., 159, 605
- Irvine, W.M., 1965, Ann. Phys., 32, 322
- Jones, C., et al., 1979, Ap.J., Lett., 234, L21
- Kerr, F.J., et al.;, 1965, "Stars and Stellar systems", Chicago Univ.
- Kirschner, R.P., et al., 1978, Astron.J., 83, 1549
- Kormendy, J., 1977, Ap.J., 218, 333
- Layzer, D., 1963, Ap.J., 138, 174
- Lea, S.M., et al., 1973, Ap.J., Lett., 184, L105
- Lynden-Bell, P., 1967, M.N.R.A.S., 136, 101
- Lyubimov, V.A., et al., 1980, Phys. Lett., 94B, 266
- Oemler, A. Jr., 1974, Ap.J., 194, 1
- Oemler, A. Jr., 1976, Ap.J., 209, 693
- Partridge, R.B., 1980, Phys. Scripta, 21, 624

- Peebles, P.J., 1971, "Physical Cosmology", Princ. Univ. Press
- Peebles, P.J., 1976, Ap.J., 205, 318
- Peebles, P.J., 1978, "The large scale structure of the Universe"
Princ. Univ. Press
- Peebles, P.J., 1979a, Les Houches, "Physical Cosmology"
- Peebles, P.J., 1979b, Astron. J., 84, 730
- Peebles, P.J., Yu, J.T., 1970, Ap.J., 162, 815
- Peebles, P.J., Hauser, H.G., 1974, Ap.J. Suppl., 28, 19
- Peterson, S., 1978, Ph.D. Thesis, Cornell Univ., Ithaca NY
- Press, W.T., 1980, Phys. Scripta, 21, 702
- Press, W.T., Vishniac, E.T., 1980, Ap.J., 236, 323
- Rees, M.J., 1978a, "Observational Cosmology", Saas-Fee
- Rees, M.J., 1978b, Nature, 275, 35
- Reines, F., et al., 1980, Phys. Rev. Lett., 45, 1307
- Rephaeli, Y., 1982, Phys. Rev. D, 26, 770
- Roberts, M.S., 1975, Proc. IAU, 69, 311
- Rood, H.J., 1981, Rep. Prog. Phys., 44, 1081
- Rood, H.J., et al., 1972, Ap.J., 175, 627
- Rood, H.J., Dickel, J., 1978, Ap.J., 224, 724
- Rubin, V.C., et al., 1978, Ap.J. Lett., 225, 107

- Sandage, A.R., 1973, Ap. J., 183, 743
- Sandage, A.R., Tamman, G.A., 1975, Ap. J., 196, 313
- Sandage, A.R., Tamman, G.A., 1976, Ap. J., 210, 7
- Schechter, P., 1976, Ap. J., 203, 297
- Schechter, P., Gunn, J.E., 1979, Ap. J., 229,
- Schimdt, M., 1965, "Stars and stellar systems", Chicago Univ. Press
- Sciama, D.W., 1982, Phys. Lett., 114B, 19
- Schramm, D.N., Symbalisky, E.M.D., 1981, Rep. Prog. Phys., 44, 293
- Schramm, D.N., Steigman, G., 1981, Ap. J., 243, 1
- Schwarzschild, M., 1954, Astron. J., 59, 273
- Silk, J., 1968, Ap. J., 151, 459
- Silk, J., Wilson, M.L., 1980, Phys. Scripta, 21, 708
- Smoot, G.F., et al., 1977, Phys. Rev. Lett., 39, 898
- Steigman, G., 1980, "Astrophysics and elementary particle", Ac. Naz. dei Lincei
- Strom, S.E., Strom, K.M., 1978, Astron. J., 83, 73
- Syunyaev, R.A., Zel'dovich, Ya B., 1970, A.S.S., 7, 3
- Tanaka, K.I., et al., 1982, Publ. Astr. Soc. of Japan, 34, 147
- Tremaine, S., Gunn, J.E., Phys. Rev. Lett., 42, 407
- Tully, R.B., Fisher, J.R., 1977, Astron. Astrophys., 54, 661
- Turner, E.L., 1976, Ap. J., 208, 20

- Turner, E.L., Gott, J.R., 1978, Ap.J. Suppl., 32, 409
- Van den Bergh, S., 1977, Vistas Astron., 21, 71
- Wagoner, R.V., 1973, Ap.J., 179, 343
- Wagoner, R.V., Fowler, W.A., Hoyle, F., 1967, Ap.J., 148, 3
- Wasserman, I., 1981, Ap.J., 248, 1
- Weinberg, S., 1972, "Gravitation and Cosmology", Wiley and Sons
- Weinberg, S., 1980, Phys. Scripta, 21, 773
- White, S.D.M., 1976, M.N.R.A.S., 177, 717
- White, S.D.M., 1980, Phys. Scripta, 21, 640
- White, S.D.M., Silk, J.J., 1979, Ap.J., 231, 1
- Witten, E., 1980, Phys. Lett., 91B, 81
- Yang, J., et al., 1979, Ap.J., 227, 697
- York, D.G., Rogerson, J.B., 1976, 1976, Ap.J., 203, 378
- Zel'dovich, Ya B., Syunyaev, R.A., 1980, Sov. Astr. Lett., 6, 249
- Zwicky, J., 1933, Helv. Phys. Acta, 6, 110
- Zwicky, J., 1937, Ap.J., 86, 217

INDICE

Introduzione	1
I. Il rapporto massa-luminosità	
1. Galassie a spirale	4
2. Galassie E ed SO	9
3. Sistemi binari e piccoli gruppi	13
4. Ammassi	14
5. Il teorema del viriale cosmico	21
6. Dinamica del superammasso locale	26
7. Densità di luminosità	31
II. L'età dell'Universo	
1. Parametri fondamentali	33
2. L'età dell'Universo	34
III. Il contributo nucleonico ad Ω	
1. L'abbondanza primordiale di elio	37
2. Deuterio	38
3. Nucleosintesi cosmologica	39
4. Alternative alla nucleosintesi standard	42
IV. Neutrini massivi e cosmologia	

1. Il modello standard e i neutrini massivi	46
V. Instabilità gravitazionale	
1. Masse caratteristiche	53
2. Evoluzione delle perturbazioni e fluttuazioni del fondo di microonde (senza neutrini)	57
3. Evoluzione delle perturbazioni (con neutrini)	63
4. Decadimento delle perturbazioni neutriniche	72
5. Ammassi e neutrini massivi	76
Conclusioni	82

BIBLIOTECA S.I.S.S.A.



0 0000 00026193 3